

РИСК - МЕНЕДЖМЕНТ  
(УРОВЕНЬ II)

Минасян В.Б.

к.ф.-м.н. , профессор ВШФМ РАНХ и ГС при  
Президенте РФ  
Certified International Investment Analyst (CIIA®)

## Модели динамической переоценки рыночного риска

### Модели прогнозирования дисперсии. Модель RiskMetrics.

Обычно, говоря о дисперсии, и ее оценке предполагается неизменность дисперсии, т.е. стационарность процессов, влияющих на образование доходностей активов и портфелей активов.

Т.е. предполагается, что распределение доходностей является стационарным или другими словами не зависит от времени.

При этом оценивают так называемую безусловную дисперсию.

Однако, наблюдая за реальным образованием ежедневных доходностей мы замечаем, что волатильности доходностей изменяются во времени, что является вероятным проявлением не стационарности соответствующих процессов и нестационарности распределения вероятностей доходностей активов.

А именно, мы предполагаем нестационарность ежедневных непрерывно начисляемых доходностей

$$r_{t+1} = \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right),$$

где  $r_{t+1}$  – доходность в день  $t+1$ ,  $P_t$  и  $P_{t+1}$  – цены актива  $t$ -ый и  $t+1$  – ый дни соответственно.

При построении моделей динамики доходностей мы будем использовать следующий факт подтверждающийся реальными наблюдениями:

- на краткосрочных, например дневных горизонтах значения стандартных отклонений доходностей на порядок выше, чем средние значения доходностей на этих горизонтах.

Поэтому, в рассматриваемых моделях, мы предполагаем, что среднее значение дневной доходности  $r_t$  равно нулю.

При сделанных предположениях ежедневные доходности в следующий  $t+1$ -ый день представляется следующим образом:

$$r_{t+1} = \sigma_{t+1} z_{t+1},$$

где  $z_{t+1}$  – независимые одинаково распределенные величины с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением равным единице. В этом случае мы будем писать, что  $z_{t+1} \approx n.o.p.D(0,1)$ .

Например, если эти величины подчиняются стандартному нормальному распределению, то эта ситуация будет обозначаться следующим образом:

$$z_{t+1} \approx n.o.p.N(0,1).$$

Это представление предполагает, что у нас существует модель для определения изменяющейся во времени дисперсии, и что мы знаем распределение доходности актива.

Мы сейчас переходим к определению модели прогнозирования завтрашней дисперсии  $\sigma_{t+1}^2$ .

Простейший способ прогнозирования, это оценка ее как простой средней от последних  $m$  наблюдений, т.е.

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^m r_{t+1-\tau}^2.$$

Заметим, что этот способ прогнозирования завтрашней дисперсии применим, как только реализована сегодняшняя доходность  $r_t$ .

Согласно приведенной формуле, экстремальные (положительные или отрицательные) доходности имеют такое же воздействия на прогнозируемую завтрашнюю дисперсию, с весом  $\frac{1}{m}$ , что и все другие доходности.

Причем это воздействие продолжается в течение ближайших  $m$  дней прогнозирования, а потом пропадает.

У данного подхода к прогнозированию завтрашней дисперсии существует еще один недостаток, связанный с тем, что не совсем ясно как выбирать  $m$ .

При этом, к сожалению выбор  $m$  существенно влияет на поведение  $\sigma_{t+1}$  во времени.

Высокие значения  $m$  приводит к избыточной гладкости динамики  $\sigma_{t+1}$ , а низкие значения  $m$  приводят к избыточной зазубренности поведения  $\sigma_{t+1}$  во времени.

Система управления рыночным риском RiskMetrics, предложенная банком JP Morgan рассматривает модель прогнозирования завтрашней дисперсии, в которой веса, приписываемые прошлым доходностям убывают экспоненциально при движении обратно течению времени.

Модель RiskMetrics прогнозирования дисперсии или модель экспоненциального сглаживания, предлагает следующую формулу для прогнозирования завтрашней дисперсии:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{t+1-\tau}^2, \quad \text{при } 0 < \lambda < 1. \quad (1)$$

Заметим, что формула (1) представляет собой формулу вычисления взвешенной средней, т.к. используя формулу суммирования геометрической прогрессии имеем:

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Формулу (1) можно переписать в виде:

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{\tau=2}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{t+1-\tau}^2 + (1 - \lambda) r_t^2 \quad (2)$$

Применяя определение экспоненциального сглаживания к сегодняшней дисперсии  $\sigma_t^2$ , имеем:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{t-\tau}^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^{\tau} r_{t-\tau}^2 = \frac{1-\lambda}{\lambda} (\lambda r_{t-1}^2 + \lambda^2 r_{t-2}^2 + \lambda^3 r_{t-3}^2 + \dots) =$$

$$= \frac{1-\lambda}{\lambda} \sum_{\tau=2}^{\infty} \lambda^{\tau-1} r_{t+1-\tau}^2,$$

откуда, с учетом (2), получаем:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1-\lambda) r_t^2 \quad (3)$$

**Пример 1.** В предыдущие 4 дня доходности актива были  $R_i \in \{0.12, 0.05, -0.05, 0.14\}$ . Параметр  $\lambda$  в модели RiskMetrics оказался равен  $\lambda = 0.94$ . Волатильность в 1-ый день, мы решили взять равной безусловной долгосрочной волатильности, которая оказалась равной 0.2 ( $\sigma_1 = \sigma = 0.2$ ). Последовательно пользуясь моделью RiskMetrics, спрогнозировать волатильность на 5-ый день  $\sigma_5$ .

Таким образом, в модели прогноз завтрашних волатильностей, представляется в виде средней взвешенного значения между сегодняшней волатильностью и квадратом сегодняшней доходности.

У модели RiskMetrics есть очевидные преимущества. Во первых, значения дисперсий в динамике ведут себя аналогично с наблюдаемыми доходностями. Недавние доходности имеют большее воздействие на завтрашнюю дисперсию, чем отдаленные во времени доходности, т.к.  $\lambda < 1$  и поэтому веса становятся меньше с увеличением временного лага  $\tau$ .

Во вторых, модель зависит только от одного параметра  $\lambda$  и в модели RiskMetrics при оценке большого количества активов, просто выбирают  $\lambda = 0.94$  при ежедневном прогнозировании дисперсии.

Вес квадрата сегодняшней доходности равен  $1 - \lambda = 0.06$  и веса экспоненциально убывают, так например вес, приписываемый прошлому 100- ому квадрату доходности равен  $(1 - \lambda) \lambda^{99} = 0.000131$ .

Если включить в расчет лишь 100 предыдущих реализованных доходностей, то аккумулярованный суммарный вес равен  $(1 - \lambda) \sum_{\tau=1}^{100} \lambda^{\tau-1} = 0.998$ , таким образом уже 99,8% весов будут включены в расчет.

Поэтому для расчета необходим запас из предыдущих 100 ежедневных доходностей. Конечно, когда  $\sigma_t$  уже вычислено, то прошлые доходности больше не нужны.

При всех описанных преимуществах, модель RiskMetrics обладает определенными недостатками, которые заставляют рассматривать и применять более сложные модели.

**Модель GARCH для дисперсии**

Мы теперь рассмотрим модели, которые описывают важнейшие свойства доходностей и достаточно гибкие для выражения специфических свойств индивидуальных активов.

Простейшая из них обобщенная авторегрессивная условно гетероскедастичная модель (Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model) динамики дисперсии (GARCH) описывается следующим соотношением:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2, \text{ где } \alpha + \beta < 1. \quad (1)$$

Заметим, что модель RiskMetrics представляется как предельный частный случай простейшей модели GARCH, соответствующий значениям параметров:

$$\omega = 0, \alpha = 1 - \lambda, \beta = \lambda, \\ \text{причем } \alpha + \beta = 1.$$

**Пример 2.** В предыдущие 4 дня доходности актива были  $R_i \in \{0.12, 0.05, -0.05, 0.14\}$ . Параметры  $\omega, \alpha$  и  $\beta$  в модели GARCH оказались равными  $\omega = 0.0023, \alpha = 0.1$  и  $\beta = 0.85$ . Волатильность в 1-ый день, мы решили взять равной безусловной долгосрочной волатильности, которая оказалась равной 0.2 ( $\sigma_1 = \sigma = 0.2$ ). Последовательно пользуясь моделью GARCH, спрогнозировать волатильность на 5-ый день  $\sigma_5$ .

Однако, модель GARCH более продуктивная, потому что позволяет определить безусловную (долгосрочную) дисперсию, т.к. имеем:

$$\sigma^2 = E[\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha E[r_t^2] + \beta E[\sigma_t^2] = \omega + \alpha \sigma^2 + \beta \sigma^2,$$

откуда получаем, что

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (2)$$

Также, очевидно, что при условии  $\alpha + \beta = 1$ , которое выполняется в случае модели RiskMetrics, долгосрочная дисперсия не определяется.

Таким образом, модель GARCH подразумевает существование долгосрочной дисперсии  $\sigma^2$ , т.е. предполагает стабилизацию на долгосрочном промежутке условных дисперсий, а модель RiskMetrics не предполагает существование безусловной дисперсии.

Выражая  $\omega$  из (2) и подставляя в (1), получим

$$\sigma_{t+1}^2 = (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(r_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2). \quad (3)$$

Из этих выражений следуют следующие две интерпретации завтрашней дисперсии.

- Завтрашняя дисперсия равна среднему взвешенному значению долгосрочной дисперсией, квадратом сегодняшней доходности и сегодняшней дисперсии.
- Завтрашняя дисперсия равна долгосрочной дисперсии, с добавочными членами, пропорциональными превышению (занижению) квадрата сегодняшней доходности над долгосрочной дисперсией и соответственно

сегодняшней дисперсии над долгосрочной дисперсией.

Рассмотрим теперь прогнозирование дисперсии доходности через  $k$  дней с использованием информации, доступной в конце сегодняшнего дня.

Обозначим через  $E_t[*]$  операцию вычисления условного математического ожидания с использованием всей доступной информации в конце  $t$ -ого дня.

Используя (3), можно записать:

$$\sigma_{t+k}^2 = \sigma^2 + \alpha(r_{t+k-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2),$$

и поэтому получаем:

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+k}^2] - \sigma^2 &= \alpha E_t[r_{t+k-1}^2 - \sigma^2] + \beta E_t[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2] = \\ &= \alpha E_t[\sigma_{t+k-1}^2 z_{t+k-1}^2 - \sigma^2] + \beta E_t[\sigma_{t+k-1}^2 - \sigma^2] = \\ &= (\alpha + \beta)(E_t[\sigma_{t+k-1}^2] - \sigma^2), \end{aligned}$$

тогда т.к. из (1) следует, что  $E_t[\sigma_{t+1}^2] = \sigma_{t+1}^2$ , то получаем:

$$E_t[\sigma_{t+k}^2] - \sigma^2 = (\alpha + \beta)^{k-1} (E_t[\sigma_{t+1}^2] - \sigma^2) = (\alpha + \beta)^{k-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2). \quad (4)$$

Аналогичные вычисления в случае модели RiskMetrics показывают, что

$$E_t[\sigma_{t+k}^2] = \sigma_{t+1}^2 \quad \text{при любом } k \quad (5)$$

Из соотношения (4) видно, что в модели GARCH, чем меньше  $\alpha + \beta$ , тем быстрее с ростом времени происходит стабилизация ежедневных ожидаемых дисперсий к долгосрочной дисперсии и чем ближе  $\alpha + \beta$  к 1, тем медленнее происходит процесс стремления ежедневных ожидаемых дисперсий к долгосрочной дисперсии.

В модели же RiskMetrics, как мы знаем  $\alpha + \beta = 1$  и  $\sigma$  не определено и из соотношения (5) видно, что в этой модели ожидаемая ежедневная дисперсия устойчива: исходя из имеющейся сегодня информации, завтрашняя дисперсия определяется однозначно и дисперсии всех последующих дней прогнозируются равными завтрашней дисперсии доходностей.

Таким образом, в этой модели игнорируются долгосрочные дисперсии доходностей. Рост прогноза завтрашней дисперсии приводит к росту на ту же величину прогнозов дисперсий и на все последующие временные горизонты.

Показатель  $\alpha + \beta$  считается показателем устойчивости прогноза ежедневных дисперсий.

Чем ближе он к 1, тем устойчивее прогнозы ежедневных дисперсий.

Если  $\alpha + \beta$  близко к 1, как чаще всего и бывает, то обе модели могут давать близкие результаты на коротких временных горизонтах  $k$ , однако, их применение на длинных горизонтах может давать сильно отличающиеся результаты.

Дело в том, что если, например, сегодня день с высокой дисперсией, то модель RiskMetrics прогнозирует высокую дисперсию на все последующие дни, а GARCH

модель более реалистична и предполагает, что в будущем дисперсии будут возвращаться к безусловной долгосрочной дисперсии  $\sigma$ .

Теперь мы переходим к вопросу прогнозирования дисперсии доходности в течение  $n$  дней.

Непрерывно начисляемая доходность за  $n$  дней  $r_{t+1:t+n}$ , выражается через ежедневные непрерывно начисляемые доходности следующим образом:

$$r_{t+1:t+n} = \sum_{k=1}^n r_{t+k}.$$

При построении моделей динамики доходностей мы будем использовать следующий факт, подтверждающийся реальными наблюдениями:

- Ежедневные доходности проявляют очень малые автокорреляции, т.е. коэффициент корреляции между ежедневными доходностями мал:

$$\rho(r_{t+k_1}, r_{t+k_2}) \approx 0 \text{ при } k_1 \neq k_2.$$

Если предположить, что доходности  $r_{t+k}$  имеют нулевую автокорреляцию, т.е. что при различных  $k$  они не коррелируют друг с другом, то прогнозируемая дисперсия  $n$ -дневных доходностей  $\sigma_{t+1:t+n}^2$ , будет равна:

$$\sigma_{t+1:t+n}^2 = E_t \left[ \sum_{k=1}^n r_{t+k} \right]^2 = \sum_{k=1}^n E_t [\sigma_{t+k}^2].$$

Тогда, в модели RiskMetrics мы получаем:

$$\sigma_{t+1:t+n}^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_{t+1}^2 = n\sigma_{t+1}^2,$$

однако в модели GARCH, мы имеем:

$$\sigma_{t+1:t+n}^2 = n\sigma^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha + \beta)^{k-1} (\sigma_{t+1}^2 - \sigma^2) \neq n\sigma_{t+1}^2.$$

Хотя обе модели дают возможность прогнозирования дисперсий  $n$ -дневных доходностей, ни та, ни другая не дают возможности прогнозирования многодневного распределения вероятностей доходностей, даже если однодневное распределение доходностей известно (например, нормальное).

## Оценка параметров модели с помощью принципа максимального правдоподобия

Рассмотренные в предыдущих параграфах модели предполагают, что параметры модели определены так, что модели дают результаты близкие к реальным.

Наблюдаемыми величинами в моделях являются доходности  $r_t$  и согласно модели возникает отклик в виде прогнозируемых значений завтрашних дисперсий  $\sigma_t^2$ , которые зависят от параметров модели, например  $\alpha, \beta$  и  $\omega$ .

Возникает проблема определения оптимальных значений этих параметров, чтобы прогнозируемые дисперсии наилучшим образом соответствовали бы наблюдаемым доходностям.

Мы рассмотрим метод максимального правдоподобия для нахождения данных параметров.

Предположим сначала, что ежедневные доходности распределены нормально. Тогда, в силу наших предположений имеем:

$$r_t = \sigma_t z_t, \text{ где } z_t \approx n.o.p.N(0,1).$$

В предположении нормальности ежедневных распределений  $r_t$ , функция правдоподобия равна:

$$l_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

А совместной функцией правдоподобия выборки из независимых доходностей  $(r_1, r_2, \dots, r_T)$ , называется функция:

$$L = \prod_{t=1}^T l_t = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right).$$

Согласно принципу максимального правдоподобия, параметры модели необходимо выбирать из условия максимизации совместной функции правдоподобия наблюдаемой выборки.

Вспомним, что т.к.  $\ln(x)$  является монотонно возрастающей функцией, то максимизация любой функции (в частности  $L(\alpha, \beta, \omega)$ ), эквивалентна максимизации логарифма от нее.

Таким образом, параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega$  выбираются из решения следующей задачи на нахождение максимума функции:

$$\text{Max} \ln L = \text{Max} \sum_{t=1}^T \ln l_t = \text{Max} \sum_{t=1}^T \left[ -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right].$$

Полученные таким образом оценки неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega$  называются оценками максимального правдоподобия.

Оценки максимального правдоподобия обладают таким важнейшим свойством, что при неограниченно увеличивающемся числе наблюдений, данные оценки стремятся к истинным значениям, а дисперсии этих оценок становятся сколь угодно малыми.

В реальности, конечно, мы лишены возможности пользоваться данными неограниченного числа наблюдений.

Даже если мы располагаем длинным временным рядом данных, не очевидно, что все эти данные необходимо использовать.

Например, если происходили структурные изменения в рыночных оценках, или произошли изменения правил, регулирующих торговлю.

Но, в общем, на практике принято пользоваться данными прошлых 1000 дневных наблюдений и пересматривать выборки по возможности чаще, для переоценки



параметров модели.

Недостатком описанной технологии является предположение нормальности распределения непрерывно начисляемых доходностей, которое, как известно, на практике не выполняется.

Однако эта сложность устраняется с помощью применения оценок квазimaxимального правдоподобия.

Дело в том, что даже если условное распределение доходностей не нормально, метод максимального правдоподобия дает такие оценки искомых параметров, которые являются асимптотически несмещенными, состоятельными и асимптотически эффективными.

Из этого следует, что полученные в этой ситуации оценки, называемые оценками квазimaxимального правдоподобия, можно использовать при достаточно длинных выборках, даже без предположения нормальности распределения доходностей. Конечно, простота данного подхода получается за счет возможной жертвы точностью оценки при относительно небольшом объеме наблюдений.

Иногда при применении методов максимального (или квазimaxимального) правдоподобия, с целью уменьшения параметров, которые оцениваются этими методами, применяют следующее упрощающее предложение.

Напомним, что согласно модели GARCH, завтрашняя дисперсия доходностей определяется из соотношения:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2 = (1 - \alpha - \beta) \sigma^2 + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_t^2.$$

Тогда, вместо оценки  $\omega$  по методу максимального правдоподобия, мы можем просто оценить долгосрочную дисперсию  $\sigma^2$ , в виде выборочной дисперсии по формуле:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T r_t^2.$$

И, таким образом, мы уменьшим количество оцениваемых с помощью метода максимального правдоподобия параметров на единицу (т.е. до двух).

### Волатильность портфеля. Моделирование условных ковариаций и корреляций.

Напомним, что доходность портфеля из N ценных бумаг в день t+1 определяется по формуле:

$$r_{P,t+1} = \sum_{i=1}^N x_i r_{i,t+1},$$

где

$x_i$  – относительный вес i – ой ценной бумаги в портфеле в конце t- ого дня,

$R_{i,t+1}$  – доходность i – ой ценной бумаги в день t+1.

Риск же портфеля, представляемый волатильностью доходности портфеля в  $t+1$  – ый день, рассчитывается в виде дисперсии доходности портфеля (или ее стандартным отклонением) в виде:

$$\sigma_{P,t+1}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij,t+1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{i,t+1} \sigma_{j,t+1} \rho_{ij,t+1},$$

где

$\sigma_{ij,t+1}$  – ковариация между доходностями ценных бумаг  $i$  и  $j$  в день  $t+1$ ,

$\rho_{ij,t+1}$  – корреляция между доходностями ценных бумаг  $i$  и  $j$  в день  $t+1$ ,

$\sigma_{i,t+1}$  и  $\sigma_{j,t+1}$  – соответственно, стандартные отклонения доходностей  $i$ - ой и  $j$  – ой ценных бумаг.

Заметим, что даже если у нас есть построенный прогноз волатильностей каждой из ценных бумаг в портфеле, нам для оценки риска портфеля нужна модель оценки всех корреляций.

Если количество активов в портфеле  $N$ , то у нас получается  $\frac{N(N+1)}{2}$  различных корреляций. Значит, например, если в портфеле 100 активов, то придется прогнозировать 4950 ковариаций.

Поэтому, сначала, попробуем найти методы, связанные с меньшим количеством расчетов.

**Понижение размерности.** Хорошо диверсифицированные портфели и факторные модели.

Достаточно простым способом понижения размерности модели портфеля, является введение факторной структуры.

Например, в случае хорошо диверсифицированного портфеля, можно ограничиться одним фактором – фактором рыночной доходности  $r_M$ .

В таких портфелях специфический риск практически нивелирован, и они содержат лишь систематический риск, представленный фактором рыночной доходности (доходностью индекса):

$$r_P = \alpha + \beta_P r_M,$$

где  $\beta_P$  – коэффициент регрессии доходностей портфеля по отношению к рыночной доходности.

В этом случае получается, что

$$\sigma_{P,t+1}^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2.$$

Тогда, вместо моделирования корреляций достаточно оценить  $\beta_P$ .

Наконец, управляющий риском портфеля, включающего большое количество ценных бумаг, но не полностью диверсифицированного, т.е. содержащего влияние специфического риска на полный риск портфеля, может рассматривать риск, как в основном исходящий из относительно небольшого числа (например, 10 – и)

различных факторов.

Тогда он применяет многофакторную модель, в которой доходность портфеля генерируется одной линейной моделью:

$$r_p = a_p + b_{p1}F_1 + b_{p2}F_2 + \dots + b_{pk}F_k$$

где  $r_p$  - доходность портфеля Р,  $a_p$  - доходность портфеля Р, если реализация всех факторов равна нулю,  $b_{pi}$  - чувствительности (или систематические риски) портфеля Р относительно фактора  $i$ ,  $F_i$  - реализованная доходность фактора  $i$ .

В этом случае, риск портфеля, выражаемый дисперсией его доходности, представляется формулой:

$$\sigma_{P,t+1}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{pi} b_{pj} \sigma_{F_i F_j, t+1} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{pi} b_{pj} \sigma_{F_i, t+1} \sigma_{F_j, t+1} \rho_{F_i F_j, t+1},$$

где

$\sigma_{F_i F_j, t+1}$  – ковариация между доходностями факторов  $F_i$  и  $F_j$  в день  $t+1$ ,

$\rho_{F_i F_j, t+1}$  – корреляция между доходностями факторов  $F_i$  и  $F_j$  в день  $t+1$ ,

$\sigma_{F_i, t+1}$  и  $\sigma_{F_j, t+1}$  – соответственно, стандартные отклонения доходностей факторов  $F_i$  и  $F_j$  в день  $t+1$ .

При таком подходе придется оценивать на порядок меньшее количество корреляций.

## Моделирование условных ковариаций

Теперь рассмотрим методы прямого моделирования условных ковариаций. Простым, но спорным способом для моделирования изменяющихся во времени ковариаций является применение простых скользящих средних.

В этом случае, ковариацию между активами  $i$  и  $j$  просто оценивают так:

$$\sigma_{ij, t+1} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{\tau=1}^m r_{i, t+1-\tau} r_{j, t+1-\tau},$$

при этом, способ расчета достаточно прост, но нет удовлетворительного способа выбора числа  $m$ .

Мы можем вместо предыдущих оценок использовать экспоненциальное сглаживание ковариаций, полагая:

$$\sigma_{ij, t+1} = (1 - \lambda) r_{i, t} r_{j, t} + \lambda \sigma_{ij, t},$$

выбрав  $\lambda = 0,94$ , так же как выше в соответствующей модели волатильности.

Понятно, что модель экспоненциального сглаживания ковариаций вполне применима, однако необходимо помнить о недостатке данной модели, который является следствием того, что сумма коэффициента  $1 - \lambda$  при произведении

доходностей  $r_{i,t}, r_{j,t}$  и коэффициента  $\lambda$  при ковариации  $\sigma_{ij,t}$  равна нулю.

Отсюда следует, что данная модель не предполагает возврата среднего значения ковариаций к их безусловному среднему значению.

Значит, если в какой то день ковариация примет высокое значение, она будет оставаться высокой и в будущем, что не согласуется с нашими естественными представлениями.

Поэтому, необходимо рассмотреть модель, в которой заложен возврат средних ковариаций.

Например, GARCH модель для ковариаций предлагает следующее обобщение экспоненциального сглаживания ковариаций:

$$\sigma_{ij,t+1} = \omega_{ij} + \alpha r_{i,t} r_{j,t} + \beta \sigma_{ij,t},$$

в которое заложена тенденция к возвращению к долгосрочной безусловной ковариации, которая равна:

$$\sigma_{ij} = \frac{\omega_{ij}}{1 - \alpha - \beta}.$$

Заметим, что в рассматриваемых моделях, параметры  $\lambda, \alpha$  и  $\beta$  не изменяются при переходе от одних ценных бумаг к другим и согласованы с соответствующими их значениями для оценки дисперсии.

## Моделирование условных корреляций

Моделирование статстической зависимости между ценными бумагами удобнее осуществлять с помощью коэффициентов корреляций, а не ковариаций.

Дело в том, что ковариация является размерной величиной, а коэффициент корреляции – безразмерная величина, причем принимающая значения между  $-1$  и  $1$ .

Прямой способ моделирования корреляций, состоит в применении представления коэффициента корреляции:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{\sigma_{ij,t+1}}{\sigma_{i,t+1} \sigma_{j,t+1}},$$

и если, например, воспользоваться моделью экспоненциального сглаживания и для дисперсий и для ковариаций, то получим следующую формулу для прогнозирования парных корреляций:

$$\rho_{ij,t+1} = \frac{(1 - \lambda) r_{i,t} r_{j,t} + \lambda \sigma_{ij,t}}{\sqrt{((1 - \lambda) r_{i,t}^2 + \lambda \sigma_{i,t}^2)((1 - \lambda) r_{j,t}^2 + \lambda \sigma_{j,t}^2)}}.$$

## Использование мер риска для управления ценностью компании

### VaR портфеля

Здесь мы будем предполагать, что распределение доходностей активов является нормальным.

Нам это предположение необходимо, чтобы при добавлении в портфель новых активов класс распределений портфеля не менялся.

Мы будем интересоваться относительными VaR активов и портфелей.

Как известно в портфеле с N активами стандартное отклонение доходности портфеля выражается формулой :

$$\sigma_p = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Т.к. для VaR портфеля P с доверительной вероятностью  $q = 1 - \alpha$  справедлива формула

$$VaR_p = V_p k_q \sigma_p,$$

где  $V_p$  - ценность портфеля P, а  $k_q$  - квантиль стандартного нормального распределения с доверительной вероятностью q.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} VaR_p &= V_p k_q \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i V_p k_q \sigma_i w_j V_p k_q \sigma_j \rho_{ij}} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_i k_q \sigma_i V_j k_q \sigma_j \rho_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N VaR_i VaR_j \rho_{ij}}. \end{aligned}$$

Здесь через  $V_i$  и  $V_j$  обозначены ценности активов i и j соответственно.

### Пример 3.

Инвестиционный портфель содержит две различные инвестиции: долгосрочные корпоративные облигации и акции с высокой капитализацией. Текущая ценность портфеля 20 млрд. руб. Оценка величины VaR с доверительной вероятностью 95% для корпоративных облигаций составляет 100 млн. руб., а для акций 250 млн. руб. Корреляция между облигациями и акциями в портфеле составляет 0.6. Определить VaR портфеля с доверительной вероятностью 95%.

### Маржинальная VaR

**Маржинальная VaR** в применении к конкретной позиции  $i$  в портфеле – это изменение в VaR портфеля от дополнительной инвестиции в эту позицию.

$$\text{Маржинальная VaR} = MVaR_i = \frac{\partial VaR_p}{\partial w_i}.$$

Если применяется VaR, выраженная в процентах (а не в рублях), то MVaR выражается в процентах.

$$\%MVaR_i = \frac{\partial \%VaR_p}{\partial w_i}.$$

Используя, что  $VaR_p = V_p k_q \sigma_p$ , а также выражение для стандартного отклонения портфеля получаем

$$MVaR_i = V_p k_q \frac{2 \sum_{j=1}^N w_j \sigma_{ij}}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}}} = V_p k_q \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p} = V_p k_q \frac{Cov(R_i, R_p)}{\sigma_p}.$$

Вспомнив определение коэффициента бета актива, замечаем, что величина

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_p)}{\sigma_p^2}$$

представляет собой бету актива  $i$  в портфеле  $P$ .

Поэтому, получаем:

$$MVaR_i = V_p k_q \sigma_p \beta_i = VaR_p \beta_i.$$

### Прирост VaR

**Прирост VaR** – это изменение в VaR от добавления новой позиции в портфель. В применении к отдельной позиции эта величина, вообще говоря, больше, чем маржинальная VaR.

Измерение прироста VaR предполагает переоценку VaR после добавления соответствующей позиции.

$$\text{Прирост VaR} = VaR \text{ после переоценки} - VaR \text{ до добавления.}$$

Эта величина может быть интересна трейдеру для оценки влияния добавления новой позиции на его регуляторный капитал.

Если компоненты портфеля малы по отношению к размеру портфеля, то естественно предположить, что маржинальная VaR остается постоянной, когда  $w_i$  стремится к нулю. Это приводит к следующей приближенной формуле для прироста VaR для  $i$ -ой компоненты портфеля:

$$\text{Прирост VaR}_i = MVaR_i \cdot w_i.$$

### Пример 4.

Портфель состоит из двух некоррелированных активов X и Y. Волатильности их составляют 8% и 16% соответственно. В эти активы инвестировано 100 млн. руб. и 50 млн. руб. соответственно. Рассчитать приросты VaR при дополнительном инвестировании 100000 руб. в каждый из активов X и Y соответственно.

### Компонента VaR

Компонента VaR для i-ой компоненты портфеля, - это часть VaR портфеля, которая может быть связана с этой компонентой портфеля.

Очевидно, что компонента VaR может быть приближена приростом VaR от возникновения i-ой компоненты.

*Компонента  $VaR_i = \text{Прирост } VaR_i = MVaR_i \cdot w_i = VaR_p \cdot \beta_i \cdot w_i$ .*

Легко проверить справедливость разложения:

$$VaR_p = \sum_{i=1}^N (\text{Компонента } VaR)_i.$$

### Пример 5

Портфель состоит из двух некоррелированных активов X и Y. Волатильности их составляют 8% и 16% соответственно. В эти активы инвестировано 100 млн. руб. и 50 млн. руб. соответственно. Дополнительно инвестировали по 100000 руб. в каждый из активов X и Y соответственно. Рассчитать компоненты VaR активов X и Y и процентное распределение VaR по компонентам.

По историческим доходностям компоненты VaR можно найти, следуя следующим шагам:

1. Выбрать исторические доходности портфеля.
2. Найти доходность портфеля, которую мы будем обозначать  $R_{VaR_p}$ , которая представляет доходность, соответствующую известному значению VaR портфеля (в процентах).
3. Определить доходности активов, входящих в портфель, при которых возникла доходность портфеля  $R_{VaR_p}$ .
4. Использовать значения доходностей каждого из активов, которые определены на шаге 3, в качестве оценки компоненты  $VaR_i$  для актива i.

Для улучшения оценки компонент VaR, аналитик должен получить значения каждого актива, входящего в портфель, соответствующих доходностям портфеля немного выше и немного ниже, чем  $R_{VaR_p}$ . Далее для каждого актива, из полученного множества доходностей этого актива рассчитать среднюю доходность, в качестве лучшего приближения компоненты VaR этого актива.

**Пример 6.** Рассмотреть портфель из двух акций: Роснефть и Сбербанк с долями вложения 0,6 и 0,4. По историческим данным о ежедневных доходностях этих компаний за последний год, оценить компоненты VaR с доверительной вероятностью 95% для каждой компании.

### Управление портфелем с использованием VaR

Управляющий портфелем может уменьшать VaR портфеля с помощью уменьшения распределения в позиции с высокими маржинальными VaR, которые мы обозначаем  $MVaR_i$  для позиции  $i$ .

Если инвестированный капитал для управляющего является постоянным, это приведет к возрастанию распределения в позиции с меньшими маржинальными VaR.

И риск портфеля сойдется к глобальному минимуму, в котором маржинальные VaR всех позиций будут равны:

$$MVaR_i = MVaR_j \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

#### Пример 7.

Портфель состоял из двух некоррелированных активов X и Y. Волатильности их составляют 8% и 16% соответственно. В эти активы было инвестировано 100 млн. руб. и 50 млн. руб. соответственно. Управляющий, заметив, что маржинальная VaR позиции X ниже, чем маржинальная VaR позиции Y, увеличил распределение в X за счет Y. Он решил инвестировать 125 млн. руб. в позицию X и 25 млн. руб. в позицию Y. Как изменятся VaR портфеля и маржинальные VaR позиций?

#### Использование маржинальной VaR в управлении рисками портфеля

Риск-менеджмент сфокусирован на рисках и чаще на уменьшении рисков. Однако минимизация рисков не обязательно приводит к оптимальному портфелю. Управление портфелем требует учета и мер риска и меры доходности при выборе оптимального портфеля.

Традиционное представление об эффективной границе, сообщает, что портфель с минимальным стандартным отклонением не является оптимальным.

Оптимальные портфели представляются в виде линейных комбинаций безрискового актива и соответствующего касательного портфеля на эффективной границе.

Для оптимальных портфелей достигается максимальное значение коэффициента Шарпа:

$$K_{Sh.} = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

Этот показатель часто выбирается в управлении портфелями как критерий качества управления портфелем.

От управляющих требуется максимизация коэффициента Шарпа, т.е. максимизация относительной величины избыточной (по отношению к безрисковой) доходности портфеля, приходящейся на единицу риска портфеля.

Удовлетворяя этому требованию, управляющий автоматически выбирает оптимальный портфель на эффективной границе.

Можно рассмотреть модифицированный вариант коэффициента Шарпа, заменяя в знаменателе коэффициента Шарпа стандартное отклонение портфеля на VaR портфеля:



$$K_{Sh.mod.} = \frac{E(R_p) - R_f}{\%VaR_p}.$$

Оказывается, максимизация этого выражения приводит к тому, относительные избыточные доходности всех позиций в портфеле, приходящиеся на соответствующие их маржинальные %VaR уравниваются, т.е. :

$$\frac{E(R_i) - R_f}{\%MVaR_i} = \frac{E(R_j) - R_f}{\%MVaR_j}$$

для всех позиций  $i$  и  $j$  в портфеле.

Вспомнив, что в предположении нормального распределения доходностей имеем  $MVaR_i = VaR_p \beta_i$ , последнее соотношение можно написать в виде:

$$\frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} = \frac{E(R_j) - R_f}{\beta_j}.$$

Для оптимального портфеля, веса в портфеле должны быть таковы, чтобы эти показатели были равны для всех позиций в портфеле.

#### Пример 8.

Предположим, что ожидаемые избыточные доходности активов X и Y из предыдущего примера составляют 7% и 12% соответственно. Предположим, как в начале, что мы инвестировали 100 млн. руб. и 50 млн. руб. соответственно.

А) Каковы значения отношений избыточная доходность к маржинальной %VaR этих активов? Каковы избыточная доходность и отношение избыточная доходность к %VaR этого портфеля? С точки зрения оптимизации портфеля, в какой актив необходимо больше перераспределить больше средств по сравнению с начальным распределением?

Б) Теперь предположим, что мы инвестировали в активы X и Y 115 млн. руб. и 35 млн. руб. соответственно. Каковы избыточная доходность и %VaR а также отношение избыточная доходность к %VaR для нового портфеля? Каковы отношения избыточная доходность к маржинальной %VaR активов X и Y? Произошло ли относительное выравнивание этих отношений?

**VaR и денежный поток под риском (Cash Flow at Risk, CFaR)**

Производственная компания может иметь активы, которые не торгуются на бирже, или их торговля осуществляется не регулярно и их ценность и волатильность трудно прогнозируемы.

При этом, для такой компании важнейшей характеристикой являются аккумулируемые ею денежные потоки.

И неопределенность в отношении величины денежных потоков, которые могут возникать в течение некоторого длительного периода времени (например, года) представляет большой интерес.

Подходящей мерой риска в этом случае может служить мера *денежного потока под риском* (Cash Flow at Risk, CFaR). CFaR – это дефицит денежного потока или разница между ожидаемым и реализуемым денежными потоками с данной доверительной вероятностью.

В предположении нормального распределения денежного потока, при известной волатильности денежного потока  $\sigma$ , CFaR рассчитывается так:

$$CFaR_p = k_p^{0,1} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{T}{\tau}}.$$

**Пример 9.**

Российская компания X ожидает положительный денежный поток в 450 млн. руб. в течение предстоящего года. Денежный поток нормально распределен. Волатильность за год денежного потока оценивается в 200 млн. руб. Определить величину  $CFaR_{0,95}$  за предстоящий год.

**Пример 10.**

Экспортирующая российская компания ожидает получить в будущем году \$80 млн. Прогнозируемая годовая волатильность денежного потока \$50 млн. Компания надеется, что нормальное распределение является хорошим приближением для распределения денежного потока. Компания знает, что она столкнется с серьезными финансовыми затруднениями, если ее денежный поток упадет ниже уровня \$20 млн. Она хотела быть уверенной, что вероятность возникновения затруднений не более 5%. Может ли компания надеяться на это?

Факторы риска, которые воздействуют на денежные потоки производственной компании, обычно включают волатильность продаж, на которую воздействуют процентные ставки, используемые для финансирования производства, обменные курсы, влияющие на стоимость экспортируемых продуктов, изменения во вкусах потребителей продукции компании, дебиторская задолженность и цена продукции.

Банки и другие финансово- инвестиционные компании – это основные пользователи VaR.

Пока такие компании имеют доступ к рынкам капитала, они могут повышать свои денежные потоки.

Однако, рост таких денежных потоков отражается на кредитоспособности компании, и в случае падения ценности активов компании, возможность роста капиталов уменьшается.

Регуляторы банков смотрят на отношение VaR к собственному капиталу.

Если VaR велико по отношению к собственному капиталу компании, то вероятность провала финансового института велика.

Для брокерских компаний VaR подходящая мера риска общего риска компании.

Дело в том, что различные подразделения брокерской компании могут иметь позиции по акциям, облигациям, различным производным инструментам.

Традиционные меры риска, применяемые к этим инструментам различны:

стандартное отклонение доходности – для акций, дюрация – для облигаций, «греки» - для производных. VaR же, это единая мера риска, которая может быть использована для объединения всех рисков и измерения полного риска в рамках всей компании.

Брокерская компания может тогда управлять VaR компании и вероятностью значительного падения ценности активов по отношению к капиталу компании.

Для нефинансовых компаний с не торгуемыми на бирже активами и компаний без значительного доступа к внешним рынкам капитала, возможности инвестировать и финансировать свой рост зависят от их внутреннего генерированного денежного потока, и для них более приемлемой мерой риска является CFaR.

Интерес к VaR или CFaR не взаимно исключаем.

Экспортирующая компания может получать преимущества от управления CFaR, учитывая воздействие волатильности обменного курса и волатильности продаж на денежный поток.

При этом, та же компания может иметь позиции по производным инструментам и оценивать риски этих позиций через VaR.

**Воздействие небольшого изменения состава портфеля на VaR. Предельные издержки от VaR (Marginal cost of VaR)**

Для финансовой компании, использующей VaR в качестве меры риска важно воздействие торговли активами (изменение состава портфеля активов) на величину VaR. Изменение состава активов влияет на VaR через воздействие на изменение волатильности доходности портфеля и на изменение ожидаемой доходности.

Рассмотрим изменение в портфеле, связанное с продажей актива В и соответственно уменьшением доли этого актива на  $\Delta w$  и покупкой эквивалентной ценности актива А.

Тогда, изменение волатильности портфеля можно представить в виде:

$$\Delta \sigma_P = (\beta_A - \beta_B) \cdot \Delta w \cdot \sigma_P,$$

где  $\beta_A$  и  $\beta_B$  это беты данных активов относительно общего хорошо диверсифицированного портфеля компании, а  $\sigma_P$  – волатильность этого портфеля. А изменение ожидаемой доходности портфеля можно представить в виде:

$$\Delta m_P = (m_A - m_B) \cdot \Delta w.$$

Поэтому чистое воздействие на VaR портфеля будет равно:

$$\Delta VaR_P = -V \left( (m_A - m_B) \cdot \Delta w \cdot \frac{T}{\tau} - k_p^{0,1} \cdot (\beta_A - \beta_B) \cdot \sigma_P \cdot \Delta w \cdot \sqrt{\frac{T}{\tau}} \right),$$

где V – ценность портфеля.

Из данной формулы видно, что если ожидаемая доходность покупаемого актива А выше, чем у продаваемого актива В, то это приводит к убыванию VaR портфеля, а если бета покупаемого актива А выше, чем у продаваемого актива В, то это приводит к возрастанию VaR портфеля.

Увеличение VaR связано с издержками, такими как, высокой стоимостью фондов, неоптимальной структуре капитала, высокой стоимостью потенциальных займов, высокими налогами.

Эти издержки измеряются предельными издержками от VaR (marginal cost of VaR).

**Marginal cost of VaR** - это рублевые издержки от роста VaR на 1 рубль.

Используя эту величину мы можем рассчитать чистое воздействие на ценность портфеля (компания) изменения состава портфеля, вычитая рублевые издержки от роста VaR из роста ожидаемой доходности портфеля от этого изменения:

$$\Delta V = \{V(m_A - m_B) \cdot \Delta w \cdot \frac{T}{\tau}\} - (\Delta VaR_\alpha \cdot \text{marginal.cost.of.VaR}).$$

#### Пример 11.

Компания увеличивает долю актива А в своем портфеле на 0.5% за счет уменьшения доли актива В на ту же величину. Портфель активов компании хорошо диверсифицирован и имеет ценность 500 млн. руб. Беты активов А и В по отношению к портфелю компании соответственно равны 1.2 и 0.97. Ожидаемые доходности данных активов соответственно составляют 15% годовых и 12% годовых. Предельные издержки компании от VaR с уровнем доверия 95% составляют 0.15 руб. и годовая волатильность ценности портфеля 20%. Рассчитать сумму, на которую данное изменение в портфеле увеличит или уменьшит прибыль от портфеля за год.

**Оценка воздействия нового проекта на CFaR имеющегося портфеля. Предельные издержки от CFaR (Marginal cost of CFaR). Критерий NPV с учетом Marginal cost of CFaR.**

Если портфель не является хорошо диверсифицированным, то бета не является подходящей мерой риска по отношению к риску портфеля.

Здесь необходимо использовать формулы для волатильности портфеля.

$$\sigma_{н.порт.} = \sqrt{\sigma_{порт.}^2 + \sigma_{н.пр.}^2 + 2\rho_{порт.;н.пр.} \cdot \sigma_{порт.} \cdot \sigma_{н.пр.}},$$

где  $\sigma_{порт.}$  - стандартное отклонение денежного потока существующего портфеля проектов,

$\sigma_{н.пр.}$  - стандартное отклонение денежного потока от нового проекта, а

$\rho_{порт.;н.пр.}$  - коэффициент корреляции между денежными потоками по портфелю проектов и нового проекта.

При рассмотрении нового проекта, мы можем рассчитать рублевые издержки от роста риска денежного потока и включить их в дополнительные издержки по проекту.

Эту величину можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta CFaR_p = k_\alpha^{0.1} \cdot (\sigma_{н.порт.} - \sigma_{порт.}) \cdot \sqrt{\frac{T}{\tau}}. \quad (1)$$

Увеличение CFaR связано с издержками, такими как, высокой стоимостью фондов, неоптимальной структуре капитала, высокой стоимостью потенциальных займов, высокими налогами. Эти издержки измеряются предельными издержками от CFaR (marginal cost of CFaR).

**Marginal cost of CFaR** - это рублевые издержки от роста CFaR на 1 рубль.  
 Для проекта, действующего в течение года для его принятия необходимо, чтобы NPV этого проекта было больше, чем соответствующие издержки:  

$$NPV > \Delta CFaR \cdot \text{marginal.cost.of.CFaR} / (1 + WACC).$$

Для проекта, действующего в течение T лет, необходимо рассчитать издержки дополнительной волатильности денежного потока за каждый год за проект, дисконтируя их к моменту 0 и сравнивая NPV с их суммарной современной ценностью:

$$NPV > \sum_{t=1}^N \frac{\Delta CFaR_{p,t} \cdot \text{marginal.cost.of.CFaR}}{(1 + WACC)^t}.$$

При невозможности оценки  $\Delta CVaR_{p,t}$  за каждый год t, можно сразу оценить  $\Delta CFaR_p$  за все T лет действия проекта по формуле (1) и сравнивать NPV проекта с ее дисконтированной величиной:

$$NPV > \frac{\Delta CFaR_p \cdot \text{marginal.cost.of.CFaR}}{(1 + WACC)^T}.$$

#### Пример 12.

Рассмотрим компанию с существующими проектами, которые имеют ожидаемый денежный поток 500 млн. руб. с волатильностью 200 млн. руб. Новый проект стоимостью 100 млн. руб. имеет волатильность денежных потоков 60 млн. руб. Предельные издержки от CFaR с уровнем доверия 95% составляют 0.15 руб., а коэффициент корреляции между двумя денежными потоками 0.2. Определить дополнительные издержки от CFaR.

#### Распределение Cost of CFaR и Cost of VaR компании на ее подразделения

Принцип распределения издержек от риска компании на подразделения компании, учитывающий лишь ценность их позиций может значительно недооценивать риски. Например, потенциальные потери VaR или CFaR от потери в позиции производных инструментах могут значительно превышать ценность этой позиции.

Один из способов для оценки дополнительных издержек от волатильности позиции, состоит в измерении размера дополнительного собственного капитала, который потребуется для фондирования этих потенциальных потерь.

Если компания может возместить эти потенциальные потери путем возмещения их (как долга) выпуском собственного капитала с соответствующей ценностью, то издержки от дополнительной ценности под риском (денежного потока под риском), равнялись бы размеру потенциальных потерь, умноженных на разницу между стоимостью собственного капитала и после налоговой стоимостью долга.

$$\text{Cost.of.VaR} \ (\text{Cost.of.CFaR}) = (k_e - k_d(1 - T))VaR \ \text{или} \ (k_e - k_d(1 - T))CFaR$$

#### Пример 13.

Рассматривается будущая (форвардная) позиция компании ценностью 5 млн. руб., которая подвержена минимальным потенциальным потерям в 50 млн. руб. с вероятностью 5%. Стоимость собственного капитала компании 15%, а посленалоговая стоимость долга 6%.  
Определить издержки от дополнительной ценности под риском.

Возникает практически важный вопрос: как справедливо распределить издержки от дополнительной ценности под риском (денежного потока под риском) всей компании по ее подразделениям?

Для этого удобно воспользоваться понятием *беты денежного потока* отдельного подразделения (например, трейдера).

Бета денежного потока подразделения  $i$ , это чувствительность денежного потока подразделения компании к денежному потоку всей компании. Формульно это представляется так:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(CF_i, CF_{\text{комп.}})}{\sigma^2(CF_{\text{комп.}})}.$$

Тогда, издержки от дополнительной ценности под риском (денежного потока под риском) всей компании для ее  $i$  – ого подразделения должны быть также пропорциональны относительной доле  $i$  – ого подразделения в полном капитале компании, а также коэффициенту бета данного подразделения:

$$\text{Cost.of.CFaR}_i(\text{Cost.of.Var}_i) = \beta_i \frac{E_i}{E_{\text{комп.}}} \text{Cost.of.CFaR}_{\text{комп.}}(\text{Cost.of.Var}_{\text{комп.}})$$

#### Пример 14.

Рассматривается будущая (форвардная) позиция компании ценностью 5 млн. руб., которая подвержена минимальным потенциальным потерям в 50 млн. руб. с вероятностью 5%. Стоимость собственного капитала компании 15%, а посленалоговая стоимость долга 6%.

Предположим, что доля подразделения компании в уставном капитале компании составляет 12%, а коэффициент бета подразделения равен 2. Определить издержки от дополнительной ценности под риском для данного подразделения.

#### Возможность уменьшения издержек от VaR и CFaR

Серьезность проблем с издержками от VaR и CFaR объясняются тем, что часто эти издержки финансируются не только собственным капиталом. Когда используется долговое финансирование, возможное падение ценности торгуемых активов или дефицит денежного потока, приводит к росту кредитного риска, отказу от инвестирования капитала и возможности банкротства.

Компания может уменьшить издержки от данного уровня VaR и CFaR через выпуск большего объема собственного капитала. Компания может уменьшить уровни VaR и CFaR через выбор проектов с низкими корреляциями денежных потоков или доходностей и хеджируясь с помощью производных инструментов.

Выпуск большего объема собственного капитала может помочь компании лучше противостоять падению в ценности активов или дефициту денежного потока. Если, увеличивая фонды за счет выпуска собственного капитала, компания инвестирует их в безрисковые ценные бумаги или использует для погашения долга, финансовая гибкость компании возрастает, и хотя величины VaR и CFaR при этом не изменятся, издержки от этих уровней – уменьшатся.

Однако, выпуск собственного капитала тоже не без издержек. Если доходы от выпуска собственного капитала использовать для уменьшения долга, налоговый щит будет потерян, общие издержки фондирования будут выше и уменьшение риска от остаточного долга приведет к трансферу ценностей от держателей собственного капитала к держателям остаточного долга.

Если доходы от выпуска собственного капитала инвестировать в безрисковые ценные бумаги, то здесь проявится отрицательный спрэд между после налоговыми доходностями безрисковой ставки и после налоговой стоимостью собственного капитала.

Кроме того, стоимость сделок по выпуску собственного капитала значительна, примерно 5% от роста величины фондов. При этом сигнальный эффект от выпуска собственного капитала может уменьшить общую ценность собственного капитала, а агентские издержки могут уменьшить рост ценности от выпуска собственного капитала в дальнейшем.

**Ограничения по уменьшения уровней VaR и CFaR через выбор проектов и хеджирование с помощью производных инструментов.**

Отбор проектов с низкими корреляциями денежных потоков или доходностей от активов может уменьшить уровни VaR и CFaR.

Однако сама по себе диверсификация не увеличивает ценность.

Диверсификация имеет издержки (например, издержки на управление и мониторинг) и инвесторы могут достичь больших выгод от диверсификации при низких издержках, финансируя портфели, близкие к их специализации, по сравнению с портфелями, диверсифицированными вне области их компетентности.

По сравнению с возможным изменением структуры капитала или отбором проектов, как путями уменьшения риска, хеджирование с помощью производных значительно дешевле.

Однако, при использовании производных инструментов может возрасти кредитный риск и это увеличит издержки для клиентов компании.

Кроме того, применение производных инструментов может быть связано с *моральным риском*.

При этом возникает возможность использовать производные инструменты для увеличения ценности для менеджмента, но не для других заинтересованных сторон.

Кроме того, если денежные потоки постоянно страхуются с помощью производных инструментов, то менеджмент будет иметь мало побудительных причин для такого управления компанией, чтобы денежные потоки не падали.

### Бюджетирование риска

Банки, являясь «продающей стороной» в инвестиционной отрасли, давно используют бюджетирование риска и ценность под риском (VaR).  
Банки торгуют активами часто, поэтому они не могут полагаться на традиционные меры риска, основанные на исторических данных.  
Для банков вчерашний риск может никак не влиять на сегодняшние позиции. Это привело к тому, что и «покупающая сторона» - инвестирующие компании стали все больше использовать VaR.  
При этом, инвесторы обычно стараются держать позиции на долгие сроки (например, годы).

Для банков важно иметь более динамические методы для измерения риска, такие как VaR, т.к. у них высокий леверидж.  
Институциональные инвесторы часто имеют строгие ограничения относительно левериджа, поэтому они меньше нуждаются в контроле риска потерь.  
Инвесторы должны приспособить технологию VaR к различным бизнесам.

Сравним характеристики этих двух сторон.

<i>Характеристики</i>	<i>«Продающая сторона»</i>	<i>«Покупающая сторона»</i>
Горизонт	Краткосрочный (дни)	Долгосрочный (месяц и более)
Оборачиваемость	Быстрая	Медленная
Леверидж	Высокий	Низкий
Меры риска	VaR Стресс - тестирование	Распределение активов Ошибка отслеживания
Контроль за риском	Ограничения по позициям Ограничения VaR Правила Stop-loss	Диверсификация Ориентиры Принципы инвестирования

Еще одной причиной для возрастания спроса на бюджетирование риска является возрастающая сложность, динамичность и глобализация инвестиционной отрасли. Использование VaR позволяет установить лучшие принципы управления, чем при традиционных ограничениях.  
Измеряя маржинальные VaR и величину возрастания VaR, менеджер лучше сможет принять решение о соответствующих весах в портфеле.

Бюджетирование рисков – это процесс «сверху- вниз», в который вовлекается менеджер при выборе и управлении подверженностью риску. Этот процесс с использованием VaR применяется управляющими классами активов, управляющими активами и при управлении собственными ценными бумагами.



## Инвестиционный процесс

Инвестиционный процесс включает два основных шага.

*Первый шаг* в инвестиционном процессе состоит в определении долгосрочного, стратегического распределения активов.

Обычно целью первого шага является сбалансирование доходностей и рисков и здесь применяются известные методы оптимизации портфеля с учетом доходности и риска.

На этом шаге определяется распределение по классам активов, таким, как акции национальные и иностранные, облигации национальные и иностранные, альтернативные инвестиции, такие как недвижимость, венчурный капитал и хедж – фонды.

При совершении этого распределения учитывают индексы и другие ориентиры.

*Второй шаг* в инвестиционном процессе состоит в выборе менеджерами пассивного (например, отслеживание ориентиров) или активного управления фондами в попытке получить результат лучше, чем у ориентиров.

Инвесторы должны периодически изучать деятельность и результаты менеджеров.

Их деятельность должна удовлетворять соответствующим требованиям, которые включают разрешенные типы инвестиций и ограничения по подверженности рискам, такие как по величине беты или дюрации.

Результат менеджеров может оцениваться с помощью анализа их ошибки отслеживания.

Ситуация в инвестиционной компании меняется динамично, что усложняет оценку риска. К примеру, каждый менеджер может совершать изменения в портфеле в соответствие со своими ограничениями, но результат суммарных изменений трудно измерить с помощью исторических мер. И это еще более увеличивает необходимость методологии VaR.

## Результаты хедж – фондов

Хедж – фонды используют очень неоднородные классы активов и реализуют различные торговые стратегии.

Т.к. они часто используют левиридж и торгуют в больших масштабах, их характеристики рисков более похожи на характеристики «продающей стороны» инвестиционной отрасли.

Хедж – фонды имеют много других рисков, например, связанных с низкой ликвидностью и низкой прозрачностью.

Риск ликвидности имеет различные проявления.

Во - первых – это возможность потерь при необходимости быстро ликвидировать актив.

Во – вторых, трудно измерить величину фондов, необходимых для управления этим риском.

Кроме того, низкая ликвидность приводит к низкой волатильности исторических цен, а также к низким корреляциям позиций.  
При этом, естественно, традиционные меры риска недооценивают величину риска. В хедж – фондах низкий уровень прозрачности.  
По этой причине исследование рисков осложнено и с точки зрения типов и величин. Не представляя типов и величин возрастающих рисков, трудно управлять риском полного портфеля инвестора, в который он включил хедж – фонд.

### Оценка и управление рисками в инвестиционном процессе

В инвестиционном процессе важным является оценка *абсолютного риска* в виде полных потерь в течение инвестиционного горизонта.  
Имея выборку доходностей его просто измерить (например, с помощью VaR позиций и портфелей).  
При пассивном управлении с применением ориентира, важна оценка *относительного риска* через ошибку отслеживания, которая представляет рублевые потери относительно ориентира.  
Дефицит измеряется в виде разницы между доходностями фонда и ориентира. Если ошибка отслеживания нормально распределена, то технология VaR применима к ошибке отслеживания для оценки относительного риска.

Инвестиционная компания распределяет фонды между различными управляющими, придерживающимися активной, пассивной или смешанной политикой управления. Эти управляющие часто управляют различными классами активов.  
Это снижает риск полного портфеля в соответствии с целевой политикой компании (т.е. политикой весов, связанных с различными фондами), т.е. риском того, что менеджеры могут принять различные решения, которые могут привести к недопустимым отклонениям.  
Анализ VaR поможет для проявления подверженности каждому из двух вышеописанных типов рисков.

### Риск фондирования

Наличие риска фондирования у инвестиционной компании отражается на ее возможности иметь обязательства (например, пенсионные выплаты для пенсионеров).  
С другой стороны, риск фондирования – это риск того, что ценность активов будет недостаточной для покрытия обязательств фонда.  
Для различных типов инвестиционных компаний уровень риска фондирования может сильно отличаться.

При анализе риска фондирования важной величиной является величина избытка, который равен разнице между ценностью активов и обязательств, а также изменение избытка.

$$\text{Избыток} = \text{Активы} - \text{Обязательства}$$

$$\Delta \text{Избыток} = \Delta \text{Активы} - \Delta \text{Обязательства}.$$

При управлении риском фондирования, аналитик в качестве индикатора должен использовать не обычную доходность, а избыточную доходность.

$$R_{\text{избыток}} = \frac{\Delta \text{Избыток}}{\text{Активы}} = \frac{\Delta \text{Активы}}{\text{Активы}} - \frac{\Delta \text{Обязательства}}{\text{Обязательства}} \frac{\text{Обязательства}}{\text{Активы}} = \\ = R_{\text{активы}} - R_{\text{обязательства}} \frac{\text{Обязательства}}{\text{Активы}}.$$

Для оценки этой величины нужны предположения о величине обязательств, которые будут в будущем, и поэтому она неточна.

Например, для пенсионных фондов обязательства представляют «аккумулированные пенсионные обязательства», которые представляют современную ценность пенсионных обязательств по отношению к работникам или другим бенифициарам.

Для определения текущей ценности необходимо знать ставку дисконтирования, которая обычно связана с существующим на рынке уровнем процентных ставок. Риск фондирования возникает вследствие того, что и акции и облигации обычно растут, когда процентные ставки падают, но текущая ценность будущих обязательств растет больше.

Если активы и обязательства изменяются на различные величины, это отражается на избытке и приводит к волатильности избытка в виде источника риска.

Если избыток становится отрицательным, требуются дополнительные вложения. Возникающий риск называется *избыток под риском*, и может измеряться с помощью методологии оценки обычной VaR. Соответствующую величину оценки также будем называть *избыток под риском (surplus at risk)* и обозначать SaR.

Формула для расчета SaR с доверительной вероятностью  $p$  выглядит так:

$$SaR_p = -\text{Активы} (E(R_{\text{избыток}}) - k_p \sigma(R_{\text{избыток}})).$$

Способ управления этим риском может состоять в иммунизации портфеля, путем уравнивания дюраций активов и обязательств. При этом могут возникать затруднения из-за невозможности осуществления тех или иных инвестиций или это может быть нежелательно по причине низких доходностей соответствующих активов.

#### Пример 15.

Компания X имеет 500 млн. руб. в активах и 430 млн. руб. в обязательствах. Предположим, что ожидаемая избыточная доходность равна 2%. Волатильность избыточной доходности составляет 10%.

А) Каково ожидаемое значение избытка через год?

Б) Какова величина максимальной потери в избытке с доверительной вероятностью 95%? В) Какой максимальный дефицит с доверительной вероятностью 95%?

С точки зрения операционных рисков компании, важнейшим является риск дефицита рабочего капитала.

Напомним, что рабочий капитал представляется в виде разницы скорректированных краткосрочных активов и краткосрочных обязательств.

$$WC = CA' - CL',$$

где

$$CA' = CA - CASH \text{ и } CL' = CL - CD.$$

CA – краткосрочные активы,

CL – краткосрочные обязательства,

CASH- денежные суммы и эквиваленты.

CD – краткосрочные займы (кредиторская задолженность)

Для изменения в величине рабочего капитала получается выражение:

$$\Delta WC = \Delta CA' - \Delta CL'.$$

При управлении риском дефицита рабочего капитала, в качестве индикатора следует использовать не обычную доходность, а избыточную доходность краткосрочных активов.

$$R_{WC} = \frac{\Delta WC}{CA'} = \frac{\Delta CA'}{CA'} - \frac{\Delta CL'}{CL'} \frac{CL'}{CA'} = \\ = R_{CA'} - R_{CL'} \frac{CL'}{CA'}.$$

Для оценки этой величины нужны предположения о величине краткосрочных обязательств, которые будут в будущем, и поэтому она неточна.

Для определения текущей ценности необходимо знать ставку дисконтирования, которая обычно связана с существующим на рынке уровнем процентных ставок.

Риск рабочего возникает вследствие того, что и краткосрочные активы и краткосрочные обязательства обычно растут, но текущая ценность будущих краткосрочных обязательств растет больше.

Если активы и обязательства изменяются на различные величины, это отражается на избытке рабочего капитала и приводит к волатильности рабочего капитала в виде источника риска.

Если избыток рабочего капитала становится отрицательным, требуются дополнительные вложения.

Возникающий риск, который можно назвать *рабочий капитал под риском*, и может измеряться с помощью методологии оценки обычной VaR. Соответствующую величину оценки также будем называть *рабочий капитал под риском (working capital at risk)* и обозначать WCaR.

Формула для расчета WCaR с доверительной вероятностью  $p$  выглядит так:

$$WCaR_p = -CA'(E(R_{WC}) - k_p \sigma(R_{WC})).$$

## Мониторинг с помощью VaR

Определенные типы рисков могут быть очень значимы для крупных компаний.

Например, в крупных компаниях иногда встречается такое явление, как «трейдер – мошенник».

Это происходит, когда управляющий одним из фондов внутри большого портфеля отклоняется от своих компетенций с точки зрения весовых соотношений в портфеле или даже совершает неразрешенные операции.

Эти отклонения от согласованных операций могут быть очень краткосрочными, и обычные отчетные измерители, производящиеся с определенной регулярностью могут не заметить нарушения.

**Риск – менеджмент необходим для всех видов портфелей – даже для пассивно управляемых портфелей.**

**Некоторые аналитики ошибочно надеются, что пассивное управление или бэнчмаркинг не требует мониторинга рисков.**

**Это неверно, т.к. профиль рисков ориентиров меняется во времени.**

**Системы измерения рисков, прогнозирующие будущее, должны улавливать такие тренды.**

**Мониторинг рисков активно управляемых портфелей должен помочь определить причины изменения рисков.**

**Существует три объяснения для сильного изменения рисков:**

- 1) Менеджер взял больший риск.**
- 2) Различные управляющие делают одинаковые ставки.**
- 3) Большая волатильность рынков.**

**Таким образом, когда возрастает общий риск портфеля, топ- менеджер должен исследовать причины возрастания с помощью исследования следующих вопросов**

***Превысил ли менеджер свой рисковый бюджет?***

**Процедуры VaR и в целом риск-менеджмент, помогают распределить рисковый бюджет по всем управляющим. Эти процедуры должны дать ответ на вопросы: превысил ли свой бюджет риска менеджер, и если да, то почему? Является ли это временным обстоятельством, связанным с изменением рынка? Является ли неумышленным установление таких весов в портфеле, которые привели к росту риска? Осуществлял ли менеджер неразрешенные операции?**

***Делали ли различные управляющие одинаковые ставки?***

**Если различные управляющие действуют независимо, то возможны ситуации, когда они будут совершать инвестиции с одинаковой подверженностью риску.**

**Например, такое может происходить, если управляющие прогнозируют понижение процентных ставок.**

**Управляющие облигациями будут, вероятно, переходить в долгосрочные облигации.**

**Управляющие же акциями будут, вероятно, переходить в акции, по которым выплачиваются высокие и стабильные дивиденды.**

**Это резко изменит процентный риск общего портфеля.**

***Увеличилась ли волатильность рынков?***

**Если изменились характеристики риска всего рынка, топ- менеджер должен принять решение: является ли такая волатильность портфеля приемлемой.**

**Если нет, то принять решение о ее уменьшении через изменения в весах целевого портфеля.**

**В процессе риск – менеджмента возникает много проблем с измерением риска определенных классов активов, например, недвижимости, хедж фондов или**

**венчурного капитала. Информация по инвестициям в определенные классы активов может быть ограничена (например, IPO).**

**Все чаще, клиенты интересуются системами риск-менеджмента, существующими у управляющих их активами.**

**Они больше не удовлетворяются квартальными отчетами о результатах.**

**Многие управляющие инвестициями имеют у себя систему VaR инкорпорированную с их процессами управления инвестициями.**

**Если кто-либо не имеет подходящей системы риск-менеджмента, то он может терять клиентуру по сравнению с теми, кто ее имеет.**

**Поэтому, заметны попытки управляющих выделить себя с точки зрения риск-менеджмента.**

### **Применение VaR в выборе направления инвестиций**

**Традиционные подходы к риск-менеджменту позиций сконцентрированы на ограничения по номинальному размеру позиций и по чувствительности.**

**Менеджеры придерживаются формальному следованию этих ограничений.**

**Такая система ограничений проявляет свою недостаточность, т.к. плохо учитывает леверидж, существование позиций в производных инструментах и изменения риска из-за наличия корреляций.**

**Ограничения VaR включают в себя все эти факторы.**

**Проблема с контролем позиций и ограничений состоит в том, что с их помощью, в конечном счете, не достигается главная цель.**

**Там нет измерителя возможных потерь, которые могут возникнуть в течение данного времени.**

**Нет возможности определения величины капитала, который нужно иметь при встрече с проблемой ликвидности.**

**Кроме того, от простых ограничений по определенным позициям можно легко уклониться с помощью многих инструментов.**

**Для широкого круга продуктов применение традиционных ограничений уже является неэффективным.**

### **Применение VaR в инвестиционном процессе**

**VaR может помочь на первых шагах инвестиционного процесса, когда принимаются стратегические решения по распределению активов.**

**Т.к. обычно, на этом шаге используется анализ ожидаемая доходность – дисперсия, то создается основа, необходимая для применения мер VaR.**

**VaR может использоваться в процессе распределения портфеля.**

**Кроме того, VaR может измерить специфические изменения в риске, которые могут возникнуть в результате субъективной коррекции менеджером весов.**

**VaR также используется для определения объема торговли.**  
**Треjder обычно фокусируется на доходности и риске отдельной позиции.**  
**Он может иметь определенные представления о том, как риск позиции отражается на всем портфеле.**  
**Но только адекватная система риск – менеджмента с использованием VaR может дать конкретную оценку изменения риска портфеля.**

**Ясно, что система риск – менеджмента должна быть готова к автоматическому расчету маржинальной VaR для каждой существующей и предполагаемой позиции.**  
**Когда трейдер выбирает между добавлением одной из двух позиций с одинаковыми доходностями, он должен выбрать позицию с меньшей маржинальной VaR.**

**Оптимальными являются портфели, для которых показатель Избыточная доходность/Маржинальная VaR принимает одинаковое значение для всех классов активов.** Таким образом, когда инвестор ищет следующую лучшую инвестицию, он должен следить, чтобы в соответствующем классе активов эта инвестиция имела высшее значение показателя Избыточная доходность/Маржинальная VaR.

### **Бюджетирование риска**

**Бюджетирование риска должно представлять собой процесс сверху- вниз. Первый шаг должен состоять в определении общей суммы риска, измеряемой VaR, которую компания может принять.**

#### **Пример 16.**

**Ценность активов компании составляет 3 млрд. руб. Целевая волатильность доходности активов составляет 10% за год. С точки зрения VaR с доверительной вероятностью 95%, на какие максимальные потери за год соглашается компания?**

**Значит, целью фонда является выбор активов таким образом, чтобы фонд удержал значение VaR меньше, чем рассчитанное значение.**

**Следующий шаг состоит в выборе оптимального распределения по активам при данной подверженности риску.**

**Не считая случая совершенно коррелированных классов активов, сумма VaR индивидуальных активов больше реальной VaR портфеля.**

**Таким образом, бюджетирование рисков по классам активов должно учитывать диверсификационный эффект.**

**Этот эффект уменьшается на следующем этапе, когда выбираются конкретные активы для различных классов активов.**

#### **Пример 17.**

**Менеджер управляет портфелем, состоящим из одной инвестиционной позиции А ценностью 10 млрд.руб. Он рассматривает возможность добавления к портфелю**

позиции в одном из активов X или Y ценностью в 10 млрд.руб. Текущая волатильность позиции A равна 10% в год. Менеджер ограничен общей величиной VaR портфеля за год с доверительной вероятностью 99% в 4 млрд.руб. Позиция X имеет волатильность 9% в год и корреляцию с A, равную 0.8. Позиция Y имеет волатильность 12% и корреляцию с A, равную нулю.

А) Определить, рассчитывая величины выросшей VaR и прироста VaR для каждой из позиций X и Y какую из предполагаемых позиций X или Y предпочтет инвестор в соответствие с его рисковым бюджетом?

Б) Изменился ли бы выбор инвестора, если бы он рассчитывал и пользовался значениями индивидуальных VaR позиций в отличие от прироста VaR?

В) Какой выбор все-таки является более оправданным?

#### Бюджетирование риска среди активных управляющих

В традиционных методах оценки активных управляющих измеряется их *ошибка отслеживания* выбранного ориентира и рассчитывается величина, известная как *информационный коэффициент*.

*Ошибка отслеживания* = *Активная доходность* – *Доходность ориентира*

Информационный коэффициент менеджера i, определяется по формуле:

$$IR_i = \frac{\text{Ожидаемая.ошибка.отслеживания.менеджера}}{\text{Волатильность.ошибки.отслеживания.менеджера}}$$

Для портфеля фондов, каждый из которых управляется отдельным менеджером, топ менеджмент общего портфеля должен интересоваться информационным коэффициентом портфеля:

$$IR_p = \frac{\text{Ожидаемая.ошибка.отслеживания.портфеля}}{\text{Волатильность.ошибки.отслеживания.портфеля}}$$

Если ошибки отслеживания менеджеров независимы, то, как доказано, оптимальные веса портфеля под управлением каждого из менеджеров должно определяться по формуле:

Вес портфеля под управлением менеджера i =

$$= \frac{IR_i (\text{Волатильность.ошибки.отслеживания.портфеля})}{IR_p (\text{Волатильность.ошибки.отслеживания.менеджера})}$$

Эту величину можно использовать для распределения «бюджета» ошибки отслеживания портфеля. Сумма весов не должна равняться 1, т.к. соответствующая разница может быть инвестирована в сам ориентир. При этом, согласно определению  $IR_{\text{ориентира}} = 0$ .

Оптимальные веса, естественно, должны периодически пересчитываться.

#### Пример 18.

В таблице приведены значения волатильностей ошибок отслеживания и информационных коэффициентов всего портфеля и менеджеров X и Y.

	Волатильность ошибки отслеживания	Ожидаемая ошибка отслеживания
Менеджер X	4%	0.75
Менеджер Y	5%	0.5



Портфель	2%	0.8
----------	----	-----

Определить оптимальное распределение весов портфеля под управлением различных менеджеров.