

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

**ИНСТИТУТ ЭМИТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОТДЕЛЕНИЕ ЭКОНОМИКИ**
кафедра Системного анализа и информатики

УТВЕРЖДЕНА
на заседании системного анализа и
информатики
Протокол от «15» июня 2021 г. № 7

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Индекс Б1.В.ДЭ.02.01 «Случайные процессы в экономике»

по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

направленность «Экономика и Финансы»

квалификация бакалавр

очная форма обучения

Год набора - 2021

Москва, 2021 г.

Автор(ы)–составитель(и): Ст. преподаватель кафедры эконометрики и математической экономики Демешев Б.Б., преподаватель кафедры эконометрики и математической экономики Ченцов А.М.

Заведующий кафедрой системного анализа и информатики, к.т.н., доцент Маруев С.А.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
2. Объем и место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Содержание и структура дисциплины.....	4
4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине	5
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	9
6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	10
6.1. Основная литература	10
6.2. Дополнительная литература	10
6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы	10
6.4. Нормативные правовые документы	10
6.5. Интернет-ресурсы	10
6.6. Иные источники	10
7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы	11

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы

1.1. Дисциплина «Случайные процессы в экономике» обеспечивает овладение следующими компетенциями:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКс ОС I - 1	Способность применять методы теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач	ПКс ОС I – 1.1	Знает основные методы применения теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач
		ПКс ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные экономические

1.2. В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

профессиональные действия	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
ведение аналитической работы в области экономики и финансов	ПКс ОС I – 1.1	на уровне знаний: знать методы применения теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач
	ПКс ОС I – 1.2	на уровне умений: осуществлять расчеты, связанные с решением прикладных задач

2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО

Объем дисциплины

5 ЗЕ, 64 ак. часа на контактную работу с преподавателем, 112 ак. часов на самостоятельную работу обучающихся;

Место дисциплины в структуре ОП ВО

- Б1.В.ДЭ.02.01 «Случайные процессы в экономике», 2 курс, 5 семестр
- дисциплина реализуется после изучения дисциплин:
 - математический анализ
 - алгебра
 - иностраный язык(английский)
 - теория вероятностей
 - математическая статистика
- дисциплина может реализоваться частично или полностью с применением ЭО и/или ДОТ.
- Учебные материалы дисциплины размещаются по адресу lms.raipera.ru
- форма промежуточной аттестации – зачет с оценкой.

3. Содержание и структура дисциплины

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины (модуля), ак. час./ час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий**				СР	
			Л	ЛР	ПЗ	КСР		
Очная форма обучения								
Тема 1	Сигма-алгебры и измеримость случайных величин	26	4		4		18	ДЗ-1
Тема 2	Условные распределения, условное математическое ожидание	26	4		4		18	ДЗ-2, ВДЗ-1
Тема 3	Мартингалы. Случайные блуждания	30	6		6		18	ДЗ-3, КР-1 (темы 1-3)
Тема 4	Пуассоновский и винеровский процесс.	30	6		6		18	ДЗ-4
Тема 5	Интеграл Ито. Лемма Ито.	32	6		6		20	ДЗ-5
Тема 6	Модель Блэка-Шоулса	32	6		6		20	ДЗ-6, ВДЗ-2, КР- 2 (темы 1-6)
Промежуточная аттестация		4						Зачет с оценкой
Всего:		180/135	32/24		32/24		112/84	

Примечание* – формы текущего контроля успеваемости: домашнее задание (ДЗ), вычислительное домашнее задание (ВДЗ), контрольная работа (КР).

Примечание **: в рамках указанной контактной работы с обучающимися учебные занятия могут проводиться с использованием ДОТ и/или ЭО

Содержание дисциплины

Тема 1. Сигма-алгебры и измеримость случайных величин.

Мощность множеств, счётные и несчётные множества. Мощность континуума. Примеры множеств разной мощности, мера Лебега. Вероятностное пространство и определение сигма-алгебры. Минимальная сигма-алгебра, порождённая набором множеств. Измеримость случайной величины относительно сигма-алгебры. Минимальная сигма-алгебра, порождённая случайной величиной. Определение случайного процесса, цилиндрические сигма-алгебры. Определение фильтрации (потока сигма-алгебр).

Тема 2. Условные распределения, условное математическое ожидание

Формальное определение, геометрический смысл и свойства условного математического ожидания. Закон повторного математического ожидания. Способы подсчёта условного математического ожидания для дискретных и непрерывных случайных величин. Фильтр и сглаживатель Калмана.

Тема 3. Мартингалы. Случайные блуждания.

Примеры мартингалов и не мартингалов. Стандартные приёмы получения мартингалов из немартингалов. Теорема Дуба об остановке мартингала. Случайные блуждания. Задача о разорении. Модель Крамера-Лундберга.

Тема 4. Пуассоновский и винеровский процесс.

Определение и свойства пуассоновского процесса. Построение пуассоновского процесса. Гауссовские процессы. Два определения винеровского процесса и их эквивалентность. Мартингалы, связанные с винеровским процессом. Максимум и минимум винеровского процесса.

Тема 5. Интеграл Ито. Лемма Ито.

Определение стохастического интеграла и его свойства. Лемма Ито для одномерного случая. Лемма Ито для многомерного случая. Теорема Гирсанова.

Тема 6. Модель Блэка-Шоулса

Реплицирующий актив. Оценивание опционов в рамках модели Блэка-Шоулса через риск-нейтральную меру.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации

4.1.1. В ходе реализации дисциплины Б1.В.Дэ.02.01 «Случайные процессы в экономике» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1	ДЗ-1
Тема 2	ДЗ-2, ВДЗ-1
Тема 1-3	ДЗ-3, КР-1
Тема 4	ДЗ-4
Тема 5	ДЗ-5
Тема 6	ДЗ-6, ВДЗ-2, КР-2

(обозначения: ДЗ-домашнее задание, ВДЗ-вычислительное домашнее задание, КР-контрольная работа)

4.1.2. Зачет проводится с применением следующих методов (средств): в виде письменной контрольной работы.

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся.

Типовые оценочные материалы по теме 1

ДЗ-1

1. Приведите пример алгебры на множестве натуральных чисел, не являющейся сигма-алгеброй.
2. Найдите меру Лебега множества рациональных чисел на отрезке $[0,1]$.
3. Подбрасываются два правильных 6-гранных игральных кубика. Игрок А наблюдает выпавшее значение на первом кубике, игрок В - значение на втором кубике, а игрок С - чётность суммы выпавших чисел. Постройте вероятностные пространства эксперимента с точки зрения информации, доступной различным возможным наборам игроков.

Типовые оценочные материалы по теме 2

ДЗ-2

1. Расчет характеристик условных распределений нормальных векторов.
2. Пусть X_1, X_2 - независимые пуассоновские величины с параметрами λ_1, λ_2 соответственно. Найти условное распределение $p_n(k) = \Pr(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$ и $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$.

ВДЗ-1

1. По заданным числовым рядам оцените значение ненаблюдаемой величины в начальный момент времени с использованием сглаживателя Калмана.

Типовые оценочные материалы по теме 3

ДЗ-3, КР-1:

1. Рассмотрим множество последовательностей из произвольных натуральных чисел, обозначим его буквой A . Например, одним элементом A является последовательность $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Определим подмножество $B \subset A$, последовательностей в которых единица упомянута не больше 1 раза, двойка — не более двух раз, тройка — не более трёх и так далее. Определим подмножество $C \subset A$, последовательностей, в которых все числа кроме числа 2016 упоминаются конечное количество раз, а число 2016 может упоминаться любое количество раз.
Найдите $\text{card } A$, $\text{card } B$, $\text{card } C$
2. У Буратино есть три монетки: одна целиком зелёная, вторая — целиком красная и третья — со стороны орла зелёная, со стороны решки — красная. Сначала Буратино подбрасывает цветную монетку. Если цветная монетка выпадает красной стороной, то Буратино подбрасывает красную монетку, если зелёной — то зелёную. Вероятности выпадения орла равны: 0.2 — для красной монетки, 0.4 — для зелёной, 0.7 — для цветной. Пусть X — индикатор того, выпал ли орёл на цветной монетке, а Y — индикатор того, выпал ли орёл при втором броске.
Найдите $E(Y|X)$, $E(X|Y)$, $\text{Var}(X|Y)$
3. Величины X_1, \dots, X_{100} независимы и равномерны на отрезке $[0; 1]$. Пусть $L = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{80}\}$ а $R = \max\{X_{81}, X_{82}, \dots, X_{100}\}$ и $M = \max\{X_1, \dots, X_{100}\}$
Найдите
(a) $\mathbb{P}(L > R|L)$ и $\mathbb{P}(L > R|R)$ и $\mathbb{P}(L > R|M)$, $\mathbb{P}(L > R|L, M)$
(b) $E(X_1|L)$, $E(X_1|\min\{X_1, \dots, X_{100}\})$
4. You throw a fair coin infinite number of times. Let's denote the result of the second toss by Y_2 (0 for tail and 1 for head) and the number of throws to get the first «head» by N . Find $E(Y_2|N)$, $\text{Var}(Y_2|N)$ and $E(N|Y_2)$
5. It is known that $E(Y|X) = 0$. Which of the following quantities must be zero: $E(Y)$? $E(X)$? $\text{Cov}(X, Y)$? $\text{Cov}(X^2, Y)$? $\text{Cov}(X, Y^2)$? Prove or provide a counter-example.
6. The random variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ are independent uniformly distributed on $[0; 1]$. I am summing them until the first X_i greater than 0.5 is added. After this term I stop. Let's denote by S the total sum and by N — the number of terms added. Find $E(S|N)$, $\text{Var}(S|N)$, $E(S)$

Типовые оценочные материалы по теме 4

ДЗ-4

1. Найдите ковариационную функцию броуновского моста.
2. Докажите недифференцируемость винеровского процесса

Типовые оценочные материалы по теме 5

ДЗ-5

1. Имеются процессы $U_t = \int_0^t \cos(W_s) dW_s$ и $V_t = \int_0^t \sin(W_s) dW_s$, где W_s -стандартный винеровский процесс. В какой момент/моменты времени t сечения этих процессов независимы?

Типовые оценочные материалы по теме 6

ДЗ-6, КР-2

1. Для процесса $Y_t = W_t^5 + tW_t$ найдите dY_t и выпишите ответ в полной форме записи.
2. Для процесса $Y_t = f(t) \exp(4W_t)$ найдите dY_t и подберите функцию $f(t)$ так, чтобы процесс Y_t был мартингалом.
3. Найдите $E(\int_0^t sW_s dW_s)$ и $\text{Var}(\int_0^t sW_s dW_s)$
4. Для броуновского движения W_t найдите $E(W_5(W_6 - W_3))$.
5. Find $\text{Var} \left(\int_0^t W_s ds \right)$.

You may use the following guiding steps:

- (a) Find $d(tW_t)$ in short and full form
 - (b) Find $E \left(2tW_t \int_0^t s dW_s \right)$
 - (c) Find $E \left(\left(\int_0^t s dW_s \right)^2 \right)$
 - (d) Find $E \left(\int_0^t W_s ds \right)$
 - (e) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:)
6. Researcher Veniamin throws a fair dice until 6 appears. Let denote by T the total number of throws and by N the number of throws when 5 appeared. Find $E(N|T)$, $\text{Var}(N|T)$, $E(N)$, $\text{Var}(N)$ and $E(T|N)$.
The joint distribution of the random vector (X, Y) is given by its probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{x-y}, & \text{for } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where c is a normalization constant. Find $E(X | Y)$.

7. В рамках модели Блэка-Шоулза предполагается, что $S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$. Переход к риск-нейтральной вероятности сопровождается заменой $\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$. В рамках данных обозначений рассчитайте текущую стоимость актива, который через T лет стоит $\ln S_T$.

ВДЗ-2

1. Оцените стоимость call-опциона с заданными параметрами для акций YNDX.

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Показатели и критерии оценивания компетенций с учетом этапа их формирования

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
-----------------	--------------------------	--------------------------------	---

ПКс ОС I - 1	Способность применять методы теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач	ПКс ОС I – 1.1	Знает основные методы применения теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач
		ПКс ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные экономические

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПКс ОС I – 1.1	Знает основные методы применения теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач	Указан в РПД в пределах основной литературы
ПКс ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные экономические	Указан в РПД в пределах основной литературы

Шкала оценивания.

Оценка определяется по формуле: $I = 0.2 \cdot ДЗ + 0.2 \cdot ВДЗ + 0.2 \cdot КР1 + 0.4 \cdot КР2 + \text{бонус}$
 Бонусные баллы - до 5% за активную работу и решение задач на семинарах

10-балльная шкала	Традиционная шкала	«Зачтено»/«Не зачтено»	Определение
10	Отлично	Зачтено	90% от I_{max} и выше
9	Отлично	Зачтено	80% от I_{max} и выше
8	Отлично	Зачтено	70% от I_{max} и выше
7	Хорошо	Зачтено	60% от I_{max} и выше
6	Хорошо	Зачтено	55% от I_{max} и выше
5	Удовлетворительно	Зачтено	45% от I_{max} и выше
4	Удовлетворительно	Зачтено	35% от I_{max} и выше
3	Неудовлетворительно	Не зачтено	20% от I_{max} и выше
2	Неудовлетворительно	Не зачтено	10% от I_{max} и выше
1	Неудовлетворительно	Не зачтено	5% от I_{max} и выше
0	Неудовлетворительно	Не зачтено	0% от I_{max} и выше

4.4. Методические материалы по проведению промежуточной аттестации

КР-1 проводится в середине семестра, продолжительность 1.5 часа. КР-2 и выставление оценок проводится в период проведения экзаменационной сессии. Продолжительность КР-2 – 2.5 астрономических часа. Студенты могут использовать один рукописный лист со справочными материалами и калькулятор.

Студентам, не выполнившим одну контрольную работу по уважительным причинам, пропорционально пересчитываются баллы за выполненную КР. В случае, если обе КР пропущены по уважительным причинам, зачет проводится в устной форме.

В случае, если дисциплина полностью или частично проводилась с применением технологий электронного обучения и/или дистанционных технологий, зачет может производиться с использованием системы СДО Академии и применением прокторинга.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Домашние задания и примерные варианты контрольных работ для самостоятельной подготовки могут быть опубликованы:

1. Высланы на общую почту группы

Конкретный способ коммуникации со студентами определяется преподавателем.

Для подготовки к опросам, домашним заданиям и контрольным работам необходимо ознакомиться с рекомендованной литературой, повторить материал предыдущих практических занятий и лекций. Самостоятельно разобрать задачи в конце каждой главы. При возникновении вопросов обратиться к преподавателю по электронной почте с указанием конкретной проблемы и (или) прийти к преподавателю на консультацию в установленное время.

Методические указания для самостоятельной работы

Тема 1. Сигма-алгебры и измеримость случайных величин.

Разделы 2.1-2.2 из [FK]

Задачи из задачника: разделы 1 и 2.

Тема 2. Условные распределения, условное математическое ожидание

Разделы 2.3-2.6 из [FK], глава 5 из [ВФ]

Задачи из задачника: раздел 8

Тема 3. Мартингалы. Теорема Дуба.

Разделы 2.7-2.8 из [FK], глава 14 из [ВФ]

Задачи из задачника: раздел 10

Тема 4. Пуассоновский и винеровский процесс

Глава 3 из [FK]

Задачи из задачника: раздел 11

Тема 5. Интеграл Ито. Лемма Ито.

Глава 4 из [FK]

Задачи из задачника: раздел 4.8

Тема 6. Модель Блэка-Шоулса

Разделы 5.1-5.4, 12.1-12.4 из [FK]

Задачи из задачника: раздел 14

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Основная литература.

1. [FK] Fima C. Klebaner, Introduction to stochastic calculus with applications, 2nd ed., Imperial College Press, 2005.

2. [ВФ] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и её приложения. Том 1. Издательство «Мир», 1964 г.

6.2. Дополнительная литература.

1. John C Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, 2015

2. Лекции по случайным процессам, учебное пособие, Гасников А.В., Горбунов Э.А., Гуз С.А., 2019.

6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Отдельное обеспечение не предусмотрено.

6.4. Нормативные правовые документы.

Не предусмотрены

6.5. Интернет-ресурсы.

1. Заметки к курсу стохастического анализа Б. Демешева (бета-версия),
https://raw.githubusercontent.com/bdemeshev/sc_book/master/sc_book.pdf

2. Видеозапись семинаров к курсу Теория случайных процессов, А. Шкляев:
<https://teach-in.ru/course/theory-of-random-processes-seminars-shklyaev>
3. Черновая версия задачника по стохастическому анализу (электронный доступ:
https://github.com/bdemeshev/sc401/raw/master/sc_pset/sc_problems_main.pdf)
4. <http://lms.ranepa.ru>

7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

1. Компьютерный класс
2. Доступ в интернет и локальную сеть Академии
3. Проекционное оборудование
4. Программное обеспечение:
 - Windows/Linux/Mac OS
 - R, python или Julia для проведения численных экспериментов
 - Google Chrome