

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

---

**ИНСТИТУТ ЭМИТ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
ОТДЕЛЕНИЕ ЭКОНОМИКИ**  
кафедра Эконометрики и математической экономики

**УТВЕРЖДЕНА**  
на заседании кафедры Эконометрики и  
математической экономики  
Протокол от «02» июня 2021 г. № 10

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Индекс Б1.В.02 «Дискретная математика»

по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

направленность «Экономика и финансы»

квалификация бакалавр

очная форма обучения

Год набора - 2021

Москва, 2021 г.

**Автор(ы)–составитель(и):**

к.ф.-м.н., доцент кафедры эконометрики и математической экономики Решетников В.П.

Заведующий кафедрой

эконометрики и математической экономики, к. ф.-м. н, Носко В.П.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
2. Объем и место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Содержание и структура дисциплины.....	4
4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине.....	6
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины .....	15
6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....	17
6.1. Основная литература .....	17
6.2. Дополнительная литература .....	17
6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы .....	17
6.4. Нормативные правовые документы .....	18
6.5. Интернет-ресурсы .....	18
6.6. Иные источники .....	18
7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы .....	18

## 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы

1.1. Дисциплина «Дискретная математика» обеспечивает овладение следующими компетенциями:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКс ОС I-2	Способность использовать методы дискретной математики для решения прикладных задач	ПКс ОС I – 2.1	Знает основные математические методы дискретной математики (графы)
		ПКс ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные экономические задачи с использованием графов

1.2. В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

Профессиональные действия	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
ведение аналитической работы в области экономики и финансов	ПКс ОС I – 2.1	на уровне знаний: знать основные математические методы дискретной математики (графы)
	ПКс ОС I – 2.2	на уровне умений: осуществлять расчеты, связанные с решением прикладных задач на графах

## 2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО

### Объем дисциплины

5 ЗЕ, 66/49,5 ак. часа на контактную работу с преподавателем, 78/58,5 ак. часов на самостоятельную работу обучающихся

### Место дисциплины в структуре ОП ВО

- Б1.В.02 «Дискретная математика» 1 курс, 1 семестр;
- дисциплина реализуется параллельно изучению дисциплин:  
математический анализ,  
алгебра.
- дисциплина может реализоваться частично или полностью с применением ЭО и/или ДОТ. Учебные материалы дисциплины размещаются по адресу [lms.ranepa.ru](http://lms.ranepa.ru)
- форма промежуточной аттестации – экзамен.

## 3. Содержание и структура дисциплины

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины, ак. час./час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий**				СР	
			Л	ЛР	ПЗ	КСР		
Очная форма обучения								
Тема 1	Множества, отношения функции	50	12		12		26	ДЗ; О; КР
Тема 2	Основы комбинаторики	46	10		10		26	ДЗ; О; КР
Тема 3	Элементы теории графов	46	10		10		26	ДЗ; О
		2						консультация
Промежуточная аттестация		36						экзамен
Всего:		180/135	32/24		32/24		78/58.5	

Примечание\*: формы текущего контроля успеваемости: контрольная работа (КР), домашнее задание (ДЗ), опрос (О).

Примечание \*\*: в рамках указанной контактной работы с обучающимися учебные занятия могут проводиться с использованием ДОТ и/или ЭО

## Содержание дисциплины

### Тема 1. Множества, отношения, функции

Определение множества, элемента множества, подмножества, способы задания множества. Операции объединения, пересечения, разности, дополнения. Свойства операций над множествами. Прямые произведения множеств. Определение прямого произведения. Примеры. Теорема о мощности множества, образованного декартовым произведением  $n$  множеств.

Отношения и функции. Понятие отношения. Обратное отношение. Образ и прообраз множества  $A$ . Область определения и область значений бинарного отношения  $R$ . Композиция отношений. Определение функции. Понятие обратной функции. Типы функций: сюръективная, инъективная, биективная. Матрицы бинарных отношений.

Взаимно однозначные соответствия и мощности множеств. Теоремы о мощности множеств, между которыми существует взаимно однозначное соответствие, о количестве подмножеств конечного множества. Понятие равномощных множеств, счетных множеств. Теорема Кантора. Множества мощности континуум, их свойства.

Специальные бинарные отношения, свойства бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Отношение эквивалентности. Понятие предпорядка на множестве  $A$ , частичного порядка, линейного порядка. Понятие наибольшего и наименьшего элемента частично упорядоченного множества. Полный порядок. Вполне упорядоченные множества.

### Тема 2. Основы комбинаторики.

Основные определения комбинаторного анализа. Правила суммы и произведения. Примеры решения задач. Круги Эйлера. Типы расстановок. Размещения с повторениями и без них. Основные признаки расстановки типа «размещения с повторениями». Теорема о количестве таких расстановок. Основные признаки «размещения без повторений». Теорема о подсчете числа расстановок указанного типа. Перестановки с повторениями. Теорема о подсчете количества таких перестановок. Сочетания с повторениями и без них. Основные признаки сочетаний без повторений. Теорема о подсчете количества таких сочетаний. Основные признаки сочетаний с повторениями. Теорема о подсчете количества сочетаний с повторениями. Основные свойства сочетаний. Неупорядоченные и упорядоченные разбиения множества. Бином Ньютона и полиномиальная теорема. Метод включений и исключений и его применения. Рекуррентные соотношения. Возвратные последовательности.

### Тема 3. Элементы теории графов.

Основные определения, типы графов. Определение графа, вершины, ребра (дуги, петли), отношение инцидентности, степень вершины. Основные типы графов (орграф, неорграф, униграф, мультиграф, полный граф). Маршруты, цепи, циклы. Связность. Граф типа «дерево», остов, разрез. Способы задания графов. Матрица инцидентности для ориентированного и неориентированного графа. Бинарные операции над графами. Операции объединения, соединения, пересечения, декартова произведения графов. Операции композиции. Примеры. Метрические характеристики графа. Планарность, гомеоморфизм графов. Теорема Понтрягина-Куратовского. Упорядочение дуг и вершин орграфа. Выявление маршрутов с заданным количеством ребер. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм нахождения максимального пути.

#### 4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

##### 4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости, обучающихся и промежуточной аттестации

##### 4.1.1. В ходе реализации дисциплины Б1.В.02 «Дискретная математика» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1	Домашние задания 1-5. Контрольная работа 1.
Тема 2	Домашние задания 6-9. Контрольная работа 2
Тема 3	Домашние задания 10-14.

4.1.2. Экзамен проводится с применением следующих методов (средств): в устной форме в виде ответа на вопросы билета, включающего в себя два теоретических вопроса и одну задачу.

##### 4.2. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся.

##### Типовые оценочные материалы по теме 1

Домашнее задание 1. – Способы задания множеств. Операции над множествами.

1. Задать порождающей процедурой множество целых положительных чисел, являющихся степенью двойки.
2. Даны множества:  $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ,  $B=\{3,4,5,6,7,8\}$ ,  $C=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ ,  $D=\{2,3,4\}$ .  
Задать списком множества:  
а)  $A \cup B \cup C \cup D$ ; б)  $A \cap B \cap C \cap D$ ;  
в)  $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ ; г)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
3. Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера-Венна справедливость следующих соотношений:  
а)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ;  
б)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
4. Доказать, что  $\{\{0,1\}, \{0,2\}\} \neq \{0,1,2\}$ .
5. Доказать тождества, используя только определения равенства множеств и операций над множествами:  
а)  $M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B)$ ;  
б)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ;  
в)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ;  
г)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ;  
д)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ .

Домашнее задание 2. – Доказательство тождеств. Декартово произведение множеств.

Осипова В. А. Основы дискретной математики : Учебное пособие : рек. УМО - М. : Форум : ИНФРА-М, 2006

Гл. 1 (п. 1.1), задачи 4 (а,б,в,г,д), 7 (а,б,в), 8, 9, 11 (а,б,в,г).

Домашнее задание 3. – Отношения, отображения функции.

1. Пусть  $A=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .  
а) Задать списком бинарное отношение  $P=\{ (x, y): x, y \in A, x \text{ делит } y \text{ и } x \leq 3\}$ ;  
б) указать область определения и область значений этого отношения;  
в) найти образ множества  $M=\{2,3\}$ ;  
г) найти прообраз множества  $C=\{3,4\}$ .
2. Являются ли следующие отношения функциями:  
а)  $\{(1, 2); (2, 3); (3, 2)\}$ ;  
б)  $\{(1, 2); (1,3);(2, 3)\}$ .

3. Является ли отношение  $\{(1, a); (1, b); (2, a)\}$ , определенное на декартовом произведении множеств  $A=\{1, 2\}$  и  $B=\{a, b\}$ , функцией?
4. Есть ли среди указанных отображений сюръективные:
  - а)  $X$  – множество кругов,  $Y$  – множество действительных чисел, каждому кругу сопоставляется его площадь;
  - б)  $X$  – множество кругов,  $Y$  – множество положительных действительных чисел, каждому кругу сопоставляется его площадь.
5. Является ли отношение  $\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$ , определенное на  $A \times B$ , где  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , функцией? Если да, то является ли она сюръективной, инъективной?
6. Является ли отношение  $\{(1,4); (2, 3); \{(3,2); \{(4,1)\}$ , заданное на декартовом квадрате множества  $A = \{1,2,3,4\}$ , биективным отображением?
7. Пусть  $A$  и  $B$  – конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно.  
Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?  
Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?

Домашнее задание 4. – Бинарные отношения.

1. Найти область определения, область значений бинарного отношения  $R$ . Является ли отношение  $R$  рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным:
  - а)  $R = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ ;
  - б)  $R = \{(x, y): x, y \in \mathbb{Z}, x - y \text{ четное}\}$ ;
2. Найти  $D_R, R_R, R \circ R, R \circ R^{-1}, R^{-1} \circ R$  для отношений:
  - а)  $R = \{(x, y): x, y \text{ – натуральные числа и } x \text{ делит } y\}$ ;
  - б)  $R = \{(x, y): x, y \text{ – действительные числа и } 2x > 3y\}$ .
3. Заданы два бинарных отношения  $R_1$  и  $R_2$ :  
 $R_1 \subseteq \mathbb{N}^2, R_1 = \{(a, b): b = a^2 + 2\}$ ,  
 $R_2 \subseteq \mathbb{N}^2, R_2 = \{(a, b): b = 2a + 5\}$ .  
 Найти композиции:  
 $R_1 \circ R_2; R_2 \circ R_1; R_1 \circ R_1; R_2 \circ R_2$
4. Выяснить, какие из следующих утверждений верны:
  - а) всякое бинарное отношение на множестве либо симметрично, либо антисимметрично;
  - б) никакое бинарное отношение не может быть одновременно симметричным и антисимметричным;
  - в) для любого бинарного отношения  $R$  отношение  $R \circ R^{-1}$  симметрично;
  - г) для любого бинарного отношения  $R$  отношение  $R \circ R^{-1}$  рефлексивно.

Домашнее задание 5. – Бинарные отношения (продолжение).

1. Пусть  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R_1 \subseteq A \times B$ ,  
 $R_2 \subseteq B^2: R_1 = \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$ ;  
 $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (2, 4), (4, 2)\}$ .  
 Найти матрицу отношения  $(R_1 \circ R_2)^{-1}$ .
2. Проверить, какими свойствами обладает отношение  $R \subseteq A^2$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , если  
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ .

3. Пусть  $A=\{1,2,3,4\}$ .
  - а) Задайте списком бинарное отношение  $P=\{(x,y):x,y\in A, x\leq y\}$ ;
  - б) укажите область определения и область значений этого отношения;
  - в) составьте матрицу этого отношения;
  - г) проверьте свойства отношения, используя определения свойств.
4. Даны множества  $A=\{a,b,c\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  и бинарные отношения  $P_1\subseteq A\times B$ ,  $P_2\subseteq B^2$ . Требуется:
  - 1) найти матрицу отношения  $(P_1\cdot P_2)^{-1}$ ;
  - 2) проверить с помощью матрицы  $\|P_2\|$  является ли отношение  $P_2$  рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным:
  - а)  $P_1=\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3),(c,4)\}$ ,  
 $P_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ .
  - б)  $P_1=\{(a,2),(a,4),(a,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$ ,  
 $P_2=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$ .
5. Построить бинарное отношение:
  - а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;
  - б) рефлексивное, несимметричное, транзитивное;
  - в) нерефлексивное, антисимметричное, транзитивное.
6. На множестве прямых на плоскости рассматриваются отношения:
  - а) параллельности прямых;
  - б) перпендикулярности прямых.
 Определить, будут ли эти отношения отношениями эквивалентности на этом множестве.

Контрольная работа №1 по теме 1: Множества, отношения, функции.

Тематика работы:

1. Доказать тождество, используя только определения операций над множествами.
2. Для указанного бинарного отношения найти область определения, множество значений. Проверить свойства отношения, исходя только из определения свойств.
3. Нахождение матриц для указанных бинарных отношений. Действия над матрицами. Проверка свойств бинарных отношений по их матрицам.
4. Для заданных бинарных отношений найти указанные композиции этих отношений.

Примерный вариант работы №1.

- 1.)  $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ .
- 2.)  $P\subseteq Z^2$ ,  $P=\{(x,y): x+y \text{ кратно } 3\}$
- 3.) Даны множества  $A=\{a,b,c\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  и бинарные отношения  $P_1\subseteq A\times B$ ,  $P_2\subseteq B^2$ . Требуется:
  - а) найти матрицу отношения  $(P_1\cdot P_2)^{-1}$ ;
  - б) проверить с помощью матрицы  $\|P_2\|$  является ли отношение  $P_2$  рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным. $P_1=\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$ ;  
 $P_2=\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ .

4.) Заданы два бинарных отношения  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 \subseteq \mathbb{N}^2, P_1 = \{(a,b): b=a^2+2\};$$

$$P_2 \subseteq \mathbb{N}^2, P_2 = \{(a,b): b=2a+5\}.$$

Найти композиции:

$$P_1 \cdot P_2; P_2 \cdot P_1; P_1 \cdot P_1; P_2 \cdot P_2.$$

### Типовые оценочные материалы по теме 2

Домашнее задание 6. – Комбинаторные схемы.

1. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены а) различные призы; б) одинаковые призы.
2. Из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых нет одновременно цифр 2,4 и 5.
3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «здание», чтобы гласные шли в алфавитном порядке?
4. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляются 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?
5. Группа, состоящая из 27 человек, пишет контрольную работу из трех вариантов (каждый вариант – по 9 человек). Сколькими способами можно выбрать 5 человек из группы так, чтобы среди них оказались писавшие все три варианта?
6. Сколько различных делителей имеет число: а) 2310; б) 2048?

Домашнее задание 7 – Комбинаторные схемы. Бином Ньютона и полиномиальная формула.

1. В кондитерской продавалось четыре вида пирожных. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
2. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 18, если данные 5 человек не могут быть выбраны вместе?
3. Из букв слова «статистика» путем их случайной перестановки формируется новое «слово». Сколько существует «слов», в которых согласные идут подряд?
4. Каков наибольший коэффициент разложения  $(a+b)^n$ , если сумма всех коэффициентов равна 4096 ?
5. Сколько рациональных членов содержится в разложении  $(\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2})^{100}$  ?
6. Найти коэффициент при  $x^4 y^8$  в разложении  $(1+x+y)^{20}$ .
7. Найти коэффициент при  $x^{17}$  в разложении  $(2+x^4 + x^7)^{15}$ .

Домашнее задание 8 – Метод включений и исключений.

1. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6,10,15? делящихся только на одно из них? делящихся только на два из них?
2. В лаборатории работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 10 человек знают английский, 7 – немецкий, 6- французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо – английский и французский, трое – немецкий и французский. Найти: а) сколько человек знают все три языка? б) сколько знают ровно 2 языка? в) сколько знают только английский язык?
3. В классе 35 учеников. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 – не посещают ни один из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический и физический кружок? Сколько учеников посещают только математический кружок?
4. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти число случаев, когда а) никто из них не получит свои шляпы; б) свои шляпы получают в точности  $k$  человек ( $k = 1,2,3$ ).

Домашнее задание 9. – Рекуррентные уравнения.

Решить неоднородные рекуррентные уравнения:

- 1)  $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n + 6n - 10$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -6$       2)  $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 27 \cdot 5^n$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -9$   
3)  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + (-1)^n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$       4)  $a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n + n^2 - 3n + 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$   
5)  $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n + n$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -2$ .

Контрольная работа №2 по теме 2: Основы комбинаторики.

Тематика работы:

Задания 1-2: Задачи на различные типы расстановок.

Задание 3: Задача на бином Ньютона.

Задание 4: Задача на метод включений и исключений.

Задание 5: Решить неоднородное линейное рекуррентное уравнение.

Примерный вариант контрольной работы №2.

- Из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 составляются всевозможные шестизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Сколько среди них будет таких, в которых есть одновременно цифры 1,2,3, причем эти цифры стоят в порядке возрастания и не обязательно рядом?
- Один человек имеет шесть друзей и в течение двадцати дней приглашает к себе в гости троих из них, так чтобы компания ни разу не повторилась. Сколькими способами он может это сделать?
- Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения  $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^n$  равна 182. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?
- Сколько целых чисел от 100 (включительно) до 1000 (включительно)
  - а) не делятся ни на одно из чисел 6, 10 и 15 ?
  - б) делятся ровно на одно из них ?
  - в) делятся ровно на два из них ?
- Решить неоднородное линейное рекуррентное уравнение:  
 $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n$ ;  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 1$

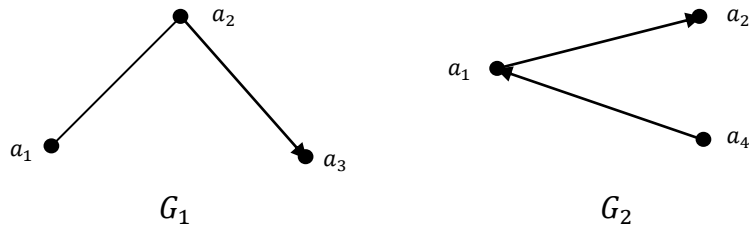
### Типовые оценочные материалы по теме 3

Домашнее задание 10. – Графы. Основные понятия.

- Определить количество ребер в полном графе с  $n$  вершинами.
- Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с остальными по одному разу). Показать, что в любой момент найдутся два шахматиста, сыгравшие одинаковое число партий.
- Девять человек проводят шахматный турнир в один круг. К некоторому моменту выяснилось, что двое сыграли одинаково число партий. Доказать, что тогда либо один участник еще не сыграл ни одной партии, либо один сыграл все партии.
- Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки, разного цвета: белая, черная, красная, синяя, зеленая. Черная едет впереди синей, зеленая впереди белой, но позади синей, красная впереди черной. Какая машина едет первой и какая последней?
- Дано множество  $A = \{2, 4, 16, 22\}$ . На этом множестве заданы отношения:
  - а)  $P = \{(x, y): x \text{ является делителем } y\}$ ;
  - б)  $P = \{(x, y): x+y \text{ делится на } 6\}$ .

Построить ориентированные графы этих отношений.

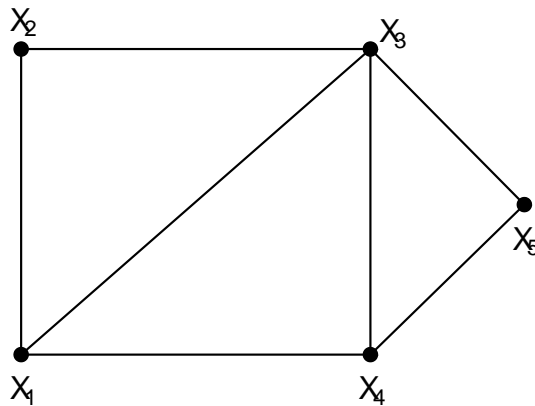
6. Заданы два графа  $G_1$  и  $G_2$ :



Изобразить геометрически: а) их объединение; б) их пересечение.

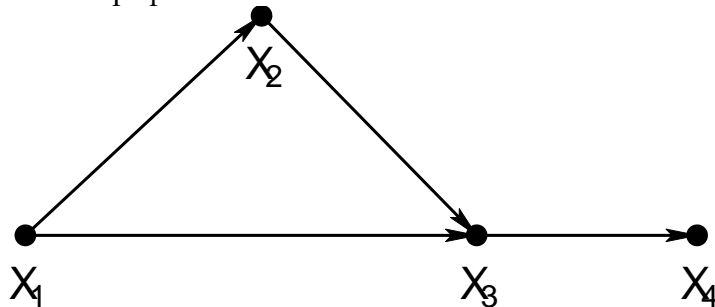
Домашнее задание 11. – Матричное задание графов.

1. Дан граф



Составьте для него матрицу смежности вершин и матрицу инцидентности.

2. Дан ориентированный граф



Составьте для него матрицу смежности вершин и матрицу инцидентности.

3. Матрица смежности вершин графа имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Постройте граф.

4. Дана матрица инцидентности графа:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

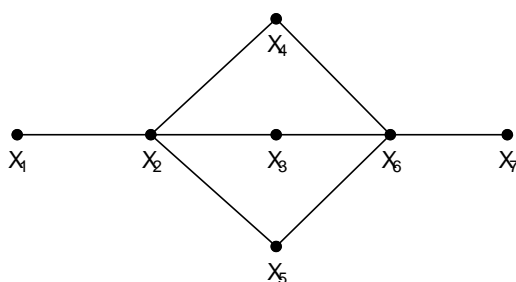
Постройте граф и найдите матрицу смежности вершин.

5. Для графа из примера 1 определить количество маршрутов длиной три ребра из вершины  $x_1$  в остальные вершины.

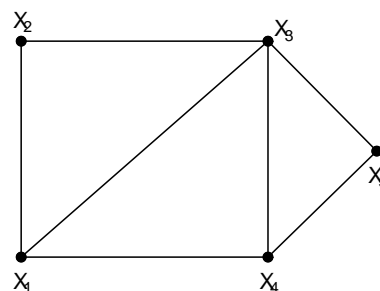
Домашнее задание 12. – Метрические характеристики графов.

1. Найти эксцентриситеты вершин, радиус и диаметр графа, центральные вершины и диаметральные цепи графа:

а)



б)



2. Построить граф, центр которого

- а) состоит ровно из одной вершины;
- б) состоит из двух вершин;
- в) совпадает с множеством всех вершин.

Домашнее задание 13. - Отыскание кратчайших путей в графе.

По заданной матрице весов ориентированного графа найти по алгоритму Дейкстры величину минимального пути и сам путь от вершины  $x_1$  до вершины  $x_6$ :

а)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	—	11	$\infty$	14	15	$\infty$
$x_2$	$\infty$	—	13	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	$\infty$	$\infty$	—	$\infty$	$\infty$	13
$x_4$	$\infty$	7	11	—	9	$\infty$
$x_5$	$\infty$	11	10	$\infty$	—	14
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	—

б)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	—	5	10	13	$\infty$	$\infty$
$x_2$	$\infty$	—	8	9	13	$\infty$
$x_3$	$\infty$	$\infty$	—	5	3	6
$x_4$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	—	8	10
$x_5$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	—	9
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	—

Домашнее задание 14. – Отыскание максимальных путей в графе.

Для графов из домашнего задания 13 найти величину максимального пути и сам путь от вершины  $x_1$  до вершины  $x_6$ .

#### 4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

**4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Показатели и критерии оценивания компетенций с учетом этапа их формирования**

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКс ОС I-2	Способность использовать методы дискретной математики для решения прикладных задач	ПКс ОС I – 2.1	Знает основные математические методы дискретной математики (графы)
		ПКс ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные экономические задачи с использованием графов

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПКс ОС I – 2.1	Знает основные математические методы дискретной математики (графы)	Указан в РПД в пределах основной литературы
ПКс ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные экономические задачи с использованием графов	Указан в РПД в пределах основной литературы

### 4.3.2 Типовые оценочные средства

Вопросы для подготовки к экзамену.

1. Множества. Основные понятия. Способы задания.
2. Операции над множествами.
3. Законы алгебры множеств.
4. Декартово произведение множеств. Его свойства.
5. Понятие бинарного отношения. Обратное отношение. Образ и прообраз множества.
6. Операции над бинарными отношениями.
7. Понятие функции. Типы функции.
8. Матрица бинарного отношения. Свойства матриц бинарных отношений.
9. Свойства бинарных отношений.
10. Определение свойств бинарного отношения по его матрице.
11. Отношение эквивалентности.
12. Отношения порядка.
13. Эквивалентные множества. Понятие мощности множества.
14. Мощность декартова произведения множеств.
15. Счетные множества. Их свойства.
16. Теорема о мощности множества, получающегося из бесконечного множества удалением конечного или счетного подмножества.
17. Несчетность множества точек отрезком  $[0,1]$ . Теорема Кантора.
18. Множества мощности континуум. Их свойства.
19. Теорема о мощности множества всех подмножеств непустого множества.
20. Предмет комбинаторики. Правила суммы и произведения.
21. Размещения без повторений и с повторениями.
22. Перестановки без повторений и с повторениями.
23. Сочетания без повторений и с повторениями.
24. Разбиение множества на группы.
25. Бином Ньютона и полиномиальная формула.
26. Определение числа элементов в объединении нескольких множеств.
27. Определение числа элементов, не обладающих ни одним из свойств.
28. Определение числа элементов, обладающих определенным набором свойств.
29. Линейные однородные рекуррентные уравнения.
30. Линейные неоднородные рекуррентные уравнения.
31. Графы. Основные понятия и определения.
32. Маршруты, цепи, циклы в графе.
33. Матрица смежности вершин и матрица смежности дуг графа.
34. Матрица инцидентий для графа.

35. Матрица связности и достижимости для графа.
36. Отыскание в графе маршрутов с заданным количеством ребер (дуг).
37. Метрические характеристики графа.
38. Упорядочение вершин ориентированного графа.
39. Отыскание кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры.

Задачи для подготовки к экзамену.

Примеры задач представлены в домашних заданиях и контрольных работах

### Шкала оценивания.

Оценка определяется по формуле:

$$I = 0.25 \frac{\sum_{i=1}^n B_i}{n} + 0.25 \frac{\sum_{j=1}^k B_{c_j}}{k} + 0,5(\text{экз.})$$

где  $n$  – число домашних заданий;  $k$  – число контрольных работ,  $B_i$  – оценка за домашнее задание по 10-ти бальной шкале,  $B_{c_j}$  – оценка за контрольную работу по 10-ти бальной шкале,  $I$  – итоговое количество баллов, причем оценка за экзамен должна быть не менее 4 баллов.

10-бальная шкала	Традиционная шкала	«Зачтено»/ «Не зачтено»	Определение
10	Отлично	Зачтено	Полные, глубокие и систематические знания, знакомство с дополнительной литературой, полный и правильный ответ, творческий подход в понимании и изложении учебного материала, полное выполнение мероприятий текущего контроля. Отличное выполнение задачи.
9	Отлично	Зачтено	Полные, глубокие и систематические знания, полный и правильный ответ, полное выполнение мероприятий текущего контроля. Отличное выполнение задачи.
8	Отлично	Зачтено	Полные и систематические знания, отсутствие существенных неточностей в ответе, полное выполнение мероприятий текущего контроля. Отличное выполнение задачи.
7	Хорошо	Зачтено	Достаточно полные и систематические знания, отсутствие существенных неточностей в ответе, имеются погрешности при выполнении мероприятий текущего контроля. Хорошо выполнена задача.
6	Хорошо	Зачтено	Достаточно полные и систематические знания, отсутствие существенных неточностей в ответе, имеются погрешности при выполнении мероприятий текущего контроля. Хорошо выполнена задача
5	Удовлетворительно	Зачтено	Знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и работы, имеются погрешности при выполнении мероприятий текущего контроля и при ответе. Задача выполнена удовлетворительно.
4	Удовлетворительно	Зачтено	Знание основного учебного материала в минимальном объеме, необходимом для дальнейшей учебы и работы, имеются погрешности при выполнении мероприятий промежуточного контроля и при ответе. Задача выполнена на удовлетворительно.
3	Неудовлетворительно	Не зачтено	Имеются существенные погрешности при выполнении мероприятий текущего контроля, допущены существенные ошибки при ответе, необходима некоторая дополнительная работа. Задача не решена.

10-балльная шкала	Традиционная шкала	«Зачтено»/ «Не зачтено»	Определение
2	Неудовлетворительно	Не зачтено	Имеются пробелы в знаниях по значительной части учебного материала, допущены существенные ошибки при ответе, необходима значительная дополнительная учебная работа. Задача не решена.
1	Неудовлетворительно	Не зачтено	Не выполнены предусмотренные программой задания, не отработаны практические или лабораторные занятия, необходимы дополнительные занятия по соответствующей дисциплине. Задача не решена
0	Неудовлетворительно	Не зачтено	Нарушение академических (плагиат и т.п.)

#### 4.4. Методические материалы

Экзамен во втором семестре проводится в аудитории. Студент выбирает случайным образом билет, содержащий два вопроса и задачу. Время подготовки к собеседованию по вопросам билета не менее 45 и не более 60 минут. При подготовке к собеседованию студенту запрещается использовать на экзамене какие-либо дополнительные материалы и электронные средства.

В случае, если дисциплина полностью или частично проводилась с применением технологий электронного обучения и/или дистанционных технологий, зачет может производиться с использованием системы СДО Академии и применением прокторинга.

### 5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методические указания по выполнению домашних заданий.

Приступая к выполнению домашних заданий, нужно, прежде всего, уяснить теоретический материал, соответствующий теме домашнего задания, и тщательно разобрать примеры, рассмотренные на лекциях и решенные на практических занятиях.

Каждый этап решения задачи нужно обосновывать, исходя из теоретических положений курса. Если есть несколько путей решения задачи, то их нужно сравнить и выбрать самый удобный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения задачи.

При доказательстве тождеств (тема 1) в случае затруднений следует воспользоваться диаграммами Эйлера. При проверке свойств бинарных отношений (тема 1), исходя из определения свойств, надо аккуратно доказать наличие этого свойства, а не ограничиваться несколькими подтверждающими примерами; одного контрпримера достаточно для утверждения об отсутствии данного свойства.

При подсчете числа комбинаторных конфигураций (тема 2) целесообразно вначале составить модель рассматриваемой ситуации, а уж потом рассмотреть все варианты, которые из нее можно получить.

При решении рекуррентных уравнений следует особое внимание обратить на вид частного решения неоднородного уравнения в зависимости от вида правой части этого уравнения и корней характеристического многочлена.

В задачах на графы следует научиться вычислять метрические характеристики графов, усвоить методику отыскания кратчайших путей.

Методические указания по подготовке к опросу

При подготовке к опросу переходить к следующему вопросу следует только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления.

Особое внимание нужно обращать на определение основных понятий. Необходимо подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

Нужно помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждений. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательствах. Следует добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схему доказательства теоремы. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал.

Методические указания по подготовке к контрольным работам

При подготовке к контрольным работам рекомендуется:

- повторить те положения теории, которые используются при решении задач;
- просмотреть решения всех типовых задач по теме;
- решить задачи, заданные для подготовки к контрольной работе;
- при возникновении вопросов обратиться к преподавателю по электронной почте с указанием конкретной проблемы и (или) прийти к преподавателю на консультацию в установленное время.

Методические указания по самостоятельной работе:

Самостоятельная работа студентом осуществляется для закрепления изученного материала после лекций и практических занятий для выполнения домашних заданий, для подготовки к опросу и контрольным работам.

№ п/п	Тип занятия	Указания
Тема 1. Множества, отношения, функции.		
1	Л; ПЗ	Начальные понятия теории множеств. Проработать материал: лекции; [1], гл. 1, пункт 1.1 (1.1.1-1.1.2). Решить задачи 1, 2, 4 (д, е, ж), 5 (а, б) в конце пункта 1.1. Выполнить домашнее задание 1.
2	Л; ПЗ	Декартово произведение множеств. Аксиомы теории множеств. Проработать материал: лекции; [1], гл. 1, пункт 1.1 (1.1.3). Решить задачи 10, 11 (а-г) в конце пункта 1.1. Выполнить домашнее задание 2.
3	Л; ПЗ	Отношения и функции. Проработать материал: лекции; [1], гл. 1, пункт 1.2 (1.2.1). Решить задачи 1 (а, б, в), 2, 3 в конце пункта 1.2. Выполнить домашнее задание 3.
4	Л; ПЗ	Отношения эквивалентности и порядка. Проработать материал: лекции; [1], гл. 1, пункт 1.2 (1.2.2). Решить задачи 4, 5, 8, 9 в конце пункта 1.2. Выполнить домашнее задание 4.
5	Л ПЗ	Мощность множеств. Счетные множества. Проработать материал лекции и решить указанные в ней задачи. Свойства бинарных отношений. Решить задачи 3 (а, б, в, г), 6, 7 в конце пункта 1.2 из [1]. Выполнить домашнее задание 5.
6	Л ПЗ(КР1)	Множества мощности континуум. Проработать материал лекции. Контрольная работа по теме 1. Для подготовки использовать материалы занятий 1 – 5 и примерный вариант контрольной работы 1.
Тема 2. Основы комбинаторики.		

№ п/п	Тип занятия	Указания
7	Л; ПЗ	Комбинаторные схемы. Проработать материал: лекции; [1], гл. 3, пункт 3.1 (3.1.1 и 3.1.2). Решить задачи 1 – 4 в конце пункта 3.1. Решить задачи 1.1, 1.2, 1.5, 1.6 гл. VIII из [2]. Выполнить домашнее задание 6.
8	Л; ПЗ	Разбиения. Бином Ньютона. Полиномиальная формула. Проработать материал: лекции; [1], гл. 3, пункт 3.1 (3.1.3 и 3.1.4). Решить задачи 5, 6 в конце пункта 3.1. Решить задачи 1.21 (1 – 2) и 1.23 (3 – 4) гл. VIII из [2]. Выполнить домашнее задание 7.
9	Л; ПЗ	Метод включений и исключений. Проработать материал: лекции; [1], гл. 3, пункт 3.2 (3.2.1). Решить задачи 1, 3 в конце пункта 3.2. Решить задачи 2.4 – 2.6 гл. VIII из [2]. Выполнить домашнее задание 8.
10	Л; ПЗ	Рекуррентные уравнения. Проработать материал: лекции; [1], гл. 3, пункт 3.2 (3.2.2). Решить задачи 3.2 (1 – 4), 3.3 (1, 5, 6), 3.5 (1 – 4) гл. VIII из [2]. Выполнить домашнее задание 9.
11	Л ПЗ (КР2)	Метод рекуррентных соотношений. Проработать материал лекции. Контрольная работа по теме 2. Для подготовки использовать материалы занятий 7 – 10 и примерный вариант контрольной работы 2.
Тема 3. Элементы теории графов.		
12	Л; ПЗ	Основные понятия теории графов. Проработать материал: лекции; [1], гл. 4, пункт 4.1; 4.5; 4.6. Решить задачи 5 – 7 в конце пункта 4.1. Выполнить домашнее задание 10.
13	Л; ПЗ	Матричное задание графов. Проработать материал: лекции; [1], гл. 4, пункт 4.2. Решить задачи 1 – 4 в конце пункта 4.2. Выполнить домашнее задание 11.
14	Л; ПЗ	Метрические характеристики графов. Проработать материал лекции, решить указанные в лекции примеры. Выполнить домашнее задание 12.
15	Л; ПЗ	Нахождение кратчайших путей в графах. Проработать материал: лекции; [1], гл. 4, пункт 4.3 (4.3.1). Решить задачи 2 (а, б) в конце пункта 4.3. Выполнить домашнее задание 13.
16	Л; ПЗ	Алгоритм нахождения максимальных путей в графах. Проработать материал лекции. Выполнить домашнее задание 14.

## 6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

### 6.1. Основная литература.

- Осипова В. А. Основы дискретной математики: Учебное пособие: рек. УМО - М. : Форум : ИНФРА-М, 2006.
- Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учебное пособие: -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

### 6.2. Дополнительная литература.

- Горбатов В. А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. Дискретная математика: Учебник для студентов вузов - М. : АСТ ; : Астрель, 2006.

### 6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Не предусмотрены.

6.4. Нормативные правовые документы.

Не предусмотрены.

6.5. Интернет-ресурсы.

1. Баврин И.И. Дискретная математика. Учебник и задачник для прикладного бакалавриата: -М.: Юрайт, 2015

[http://www.biblio-online.ru/thematic/?9&id=urait.content.1CBCF2E4-304D-4050-864C-AF09254EB8E7&type=c\\_pub](http://www.biblio-online.ru/thematic/?9&id=urait.content.1CBCF2E4-304D-4050-864C-AF09254EB8E7&type=c_pub)

2. Мальцев И.А. Дискретная математика: -М.: Лань: 2011.

<https://e.lanbook.com.ezproxy.ranepa.ru:2443/book/638#authors>

3. <http://lms.ranepa.ru>

6.6. Иные источники.

Не предусмотрены.

**7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы**

Требования к аудиториям (помещениям, кабинетам) для проведения занятий с указанием соответствующего оснащения:

Стандартная аудитория (доска, мел, маркеры)

Требования к программному обеспечению при прохождении учебной дисциплины:

Не требуется.