

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

**ИНСТИТУТ ЭМИТ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОТДЕЛЕНИЕ ЭКОНОМИКИ**
кафедра Эконометрики и математической экономики

УТВЕРЖДЕНА
на заседании кафедры Эконометрики и
математической экономики
Протокол от «02» июня 2021 г. № 10

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ
Б1.В.04 «Математический анализ (дополнительные главы)»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.04.01 «Дифференциальные и разностные уравнения»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.04.02 «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления»

по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

направленность «Экономика и финансы»

квалификация бакалавр

очная форма обучения

Год набора - 2021

Москва, 2021 г.

Автор(ы)–составитель(и): д.т.н. проф. кафедры эконометрики и математической экономики Ушаков , В.К. д.ф.-м.н. проф. кафедры эконометрики и математической экономики Чирский В.Г.

Заведующий кафедрой эконометрики и математической экономики, к. ф.-м. н, Носко В.П.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
2. Объем и место дисциплины в структуре образовательной программы.....	4
3. Содержание и структура дисциплины.....	4
4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине	6
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	10
6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	11
6.1. Основная литература	11
6.2. Дополнительная литература	11
6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы	11
6.4. Нормативные правовые документы	11
6.5. Интернет-ресурсы	11
6.6. Иные источники	11
7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы	12

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения модуля

1.1. Модуль обеспечивает овладение следующими компетенциями:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКр ОС I-1	Способность использовать методы решений дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	ПКр ОС I – 1.1	Знает теоретические основы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
		ПКр ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные задачи с использованием ОДУ
ПКр ОС I-2	Способность использовать методы оптимизации для решения прикладных задач	ПКр ОС I – 2.1	Знает основы вариационного исчисления и теории оптимального управления
		ПКр ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные задачи оптимального управления

1.2. В результате освоения модуля у студентов должны быть сформированы:

Профессиональные действия	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
ведение аналитической работы в области экономики и финансов	ПКр ОС I – 1.1	на уровне знаний: знать теоретические основы решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
	ПКр ОС I – 1.2	на уровне умений: уметь решать прикладные задачи с использованием ОДУ
	ПКр ОС I – 2.1	на уровне знаний: знать теоретические основы вариационного исчисления и теории оптимального управления
	ПКр ОС I – 2.2	на уровне умений: уметь решать прикладные задачи оптимального управления

2. Объем и место модуля в структуре ОП ВО

Объем модуля

Б1.В.04.01 «Дифференциальные и разностные уравнения»

2 з.е., количество академических часов, выделенных на контактную работу с преподавателем - 34 часа, на самостоятельную работу обучающихся - 38 часов.

Б1.В.04.02 «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления»

2 з.е., количество академических часов, выделенных на контактную работу с преподавателем - 34 часа, на самостоятельную работу обучающихся - 38 часов.

Место модуля в структуре ОП ВО

Б1.В.04.01 «Дифференциальные и разностные уравнения» 2 курс, 4 семестр

– дисциплина реализуется после изучения дисциплин:

Алгебра

Б1.В.04.02 «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления», 2 курс, 4 семестр

– дисциплина реализуется после изучения дисциплин:

алгебра

– дисциплины могут реализоваться частично или полностью с применением ЭО и/или ДОТ.

Учебные материалы дисциплины размещаются по адресу lms.ganepa.ru

– форма промежуточной аттестации модуля – экзамен.

3. Содержание и структура модуля

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины, ак. час./ час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточно й аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий**				СР	
			Л	ЛР	ПЗ	КСР		
«Дифференциальные и разностные уравнения» Очная форма обучения								
Тема 1	Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка.	8	2		2		4	КР 1
Тема 2	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.	8	2		2		4	КР 2
Тема 3	Системы линейных дифференциальных уравнений.	10	2		2		6	ДЗ1
Тема 4	Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений.	8	2		2		4	ДЗ2
Тема 5	Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка.	8	2		2		4	О
Тема 6	Линейные разностные уравнения второго порядка.	10	2		2		6	О
Тема 7	Системы линейных разностных уравнений.	8	2		2		4	КР 3
Тема 8	Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.	10	2		2		6	ДЗ 3
		2						консультация
Всего:		72/54	16/12		16/12		38/28,5	
«Элементы функционального анализа и теории оптимального управления» Очная форма обучения								
Тема 1	Числовые ряды	16	4		4		8	ДЗ,О
Тема 2	Функциональные последовательности и ряды	18	4		4		10	ДЗ,О,КР(1,2)
Тема 3	Собственные интегралы, зависящие от параметра	18	4		4		10	ДЗ,О
Тема 4	Несобственные интегралы с параметром	18	4		4		10	ДЗ,О,КР(3,4)
		2						консультация
Всего:		72/54	16/12		16/12		38/28,5	
Промежуточная аттестация		36						экзамен

Примечание: * – формы текущего контроля успеваемости: контрольная работа (КР), Домашнее задание(ДЗ), опрос (О)

Примечание **: в рамках указанной контактной работы с обучающимися учебные занятия могут проводиться с использованием ДОТ и/или ЭО

Содержание модуля

Содержание дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения»

Тема 1. Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Общие понятия для дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме). Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения (уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах). Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли.

Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных уравнениях высшего порядка. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.

Тема 3. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, задание начальных значений). Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Тема 4. Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений.

Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы). Устойчивые и неустойчивые положения равновесия. Анализ однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух неизвестных. Исследование нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.

Тема 5. Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка.

Общие понятия для разностного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задачи Коши, решение разностного уравнения подстановкой). Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной).

Тема 6. Линейные разностные уравнения второго порядка.

Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Тема 7. Системы линейных разностных уравнений.

Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия). Решение подстановкой. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.

Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.

Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений.

Содержание дисциплины «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления»

Тема 1. Числовые ряды

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Признак Даламбера. Признак Коши. Признак Гаусса (без доказательства). Интегральный признак сходимости Маклорена-Коши. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Признаки Абеля и Дирихле (без доказательства). Абсолютная сходимость ряда. Условная сходимость ряда. Перестановки членов ряда.

Тема 2. Функциональные последовательности и ряды

Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Степенные ряды. Радиус сходимости, интервал сходимости. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложения основных элементарных функций. Ряд Фурье.

Тема 3. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход под знаком интеграла. Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница. Случай, когда пределы интегрирования зависят от u ; пример. Интегрирование под знаком собственного интеграла (доказательство).

Тема 4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Несобственные интегралы с параметром. Равномерная сходимость. Примеры: $\int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx$;

$$\int_0^{\infty} ye^{-xy} dx; \quad (a) \ y \geq y_0 > 0, \quad (б) \ y > 0.$$

Критерий Коши. Признак Вейерштрасса. Признаки Абеля и Дирихле. Несобственные интегралы по ограниченному промежутку, зависящие от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование под знаком интеграла. Вычисление моментов случайной величины с нормальным распределением методом дифференцирования по параметру

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по модулю

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости, обучающихся и промежуточной аттестации.

4.1.1. Методы текущего контроля успеваемости обучающихся

В ходе реализации дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1	Контрольная работа 1.

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 2	Контрольная работа 2.
Тема 3	Домашнее задание 1
Тема 4	Домашнее задание 2
Тема 5	Опрос 1
Тема 6	Опрос 2
Тема 7	Контрольная работа 3.
Тема 8	Домашнее задание 3.

В ходе реализации дисциплины «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1	Домашнее задание, опрос.
Тема 2	Домашнее задание, опрос. Контрольная работа 1
Тема 3	Домашнее задание, опрос.
Тема 4	Домашнее задание, опрос. Контрольная работа 2

4.1.2. Экзамен проводится с применением следующих методов (средств): в виде письменного экзамена, в виде экзамена с использованием СДО (при необходимости)

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся.

Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения»

Типовые оценочные материалы по теме 1

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения **(6 баллов)**:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}.$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям **(6 баллов)**:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3}, \quad y(1) = 0.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' = \frac{4y'}{x}.$$

Типовые оценочные материалы по теме 2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям **(6 баллов)**:

$$y'' - 7y' + 12y = 12x + 17, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения **(6 баллов)**:

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения **(6 баллов)**:

$$y'' + 4y' = 16x + 16.$$

Типовые оценочные материалы по теме 3

Домашнее задание 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{4} e^{-\frac{4y}{x}}.$$

Типовые оценочные материалы по теме 4

Домашнее задание 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x.$$

Типовые оценочные материалы по теме 5

Опрос

1. Разностные уравнения первого порядка.
2. Решение уравнения,
3. Начальные условия,
4. Задачи Коши,
5. Решение разностного уравнения подстановкой.
6. Линейное уравнение первого порядка
7. Метод вариации постоянной.

Типовые оценочные материалы по теме 6

Опрос

1. Принцип суперпозиции
2. Алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.
3. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
4. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Типовые оценочные материалы по теме 7

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

1. Решить линейное разностное уравнение первого порядка (8 баллов):

$$y_{k+1} = \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^3 \cdot y_k + \frac{2(k+2)^2}{k+3}.$$

2. Решить линейное неоднородное стационарное разностное уравнение второго порядка (8 баллов):

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = -8 \cdot (2k+3) \cdot 5^k.$$

3. Решить линейную неоднородную стационарную систему разностных уравнений (8 баллов):

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + (-3)^k + 4 \cdot (-2)^k \\ y_{k+1} = -4x_k + y_k + 8 \cdot (-3)^k + 3 \cdot (-2)^k \end{cases}.$$

Типовые оценочные материалы по теме 8

Домашнее задание 3.

Решить линейную неоднородную стационарную систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + (-3)^k + 4 \cdot (-2)^k \\ y_{k+1} = -4x_k + y_k + 8 \cdot (-3)^k + 3 \cdot (-2)^k \end{cases}.$$

Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся дисциплины «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления»

Типовые оценочные материалы по теме 1

1. Доказать, что пространство $C^1[a, b]$, которое состоит из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$, обладающих непрерывной на этом отрезке производной $\dot{x}(t)$ – полное.
2. Найти приращение функционала $\Phi(x) = \int_0^1 x \frac{dx}{dt} dt$, $x_0 = t, x_0 + h$.
3. Доказать, что последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$, принадлежащих пространствам $C[0, \pi]$ и $C^1[0, \pi]$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ в пространстве $C[0, \pi]$ и не сходится к функции $f(x) \equiv 0$ в пространстве $C^1[0, \pi]$.
4. Доказать, что пространство $C^1[a, b]$, которое состоит из непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $x(t)$, обладающих непрерывной на этом отрезке производной $\dot{x}(t)$ – полное.

Материалы опроса

1. Функционал. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство.
2. Расстояния на множестве непрерывных функций. Пространство $C[a, b]$.
3. Пространства $C[a, b], C^1[a, b], C^k[a, b]$.
4. Сходимость в метрическом пространстве.
5. Равномерная сходимость и сходимость в среднем.
6. Полные метрические пространства. Примеры полных метрических пространств.

Типовые оценочные материалы по теме 2

Домашние задания

1. Исследовать на наличие экстремума функционал

$$\Phi(x) = \int_1^5 (4tx - \dot{x}^2) dt$$

при условиях $x(1) = 2, x(5) = 9$.

2. Решить уравнение Эйлера для математической модели задачи Рамсея с заданными функциями: $f(z) = z, U(C) = 2\sqrt{C}$, причём пусть $r = \frac{1}{3}$.

3. Исследовать на экстремум функционал

$$\Phi(x) = \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt$$

при условиях $x(0) = 1, x(\pi) = -1$.

Материалы опроса

1. Непрерывность функционала.
2. Вариация функционала.
3. Экстремум функционала.
4. Уравнение Эйлера.
5. Математическая модель задачи Рамсея.
6. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.

Типовые оценочные материалы по теме 3

Домашние задания

1. Исследовать на экстремум функционал

$$\Phi(x) = \int_0^{\pi} (-x^2 + u^2) dt, \dot{x} = u.$$

при условиях $x(0) = 1, x(\pi) = -1$.

2. Найти

$$\min \int_0^2 \left(2 + (x(t))^2 + \frac{1}{2} (u(t))^2 \right) dt, \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, x(0) = 1,$$

на значение $x(2)$ условий нет.

Материалы опроса

1. Функция Понтрягина.
2. Принцип максимума Понтрягина.
3. Вариационное исчисление и принцип максимума.

Контрольная работа №1

1. Найти экстремаль функционала

$$\int_{-1}^0 (12tx - \dot{x}^2) dt, x(-1) = 1, x(0) = 0.$$

2. Найти экстремаль функционала

$$\int_0^1 (t + \dot{x}^2) dt, x(0) = 1, x(1) = 2.$$

3. Исследовать на экстремум функционал

$$\int_0^1 (u^2 + 4x^2) dt, \dot{x} = u, x(0) = e^2, x(1) = 1.$$

Типовые оценочные материалы по теме 4

Домашние задания

Найти:

1. $\max \sum_{i=0}^3 (2x_i - u_i^2)$, при условиях $x_{i+1} = x_i + u_i, i = 0, 1, 2, x_0 = 0, u_i \in \mathbb{R}$.

2. Найти

$$\max \left(\sum_{i=0}^3 \ln(x_i u_i) \right)$$

при условиях $x_{i+1} = 2(1 - u_i)x_i, i = 0, 1, 2, x_0 = 8, 0 < u_i \leq 1$.

3. Найти:

$\max(\sum_{i=0}^2 (2x_i - (x_{i+1} - x_i)^2) + 2x_3)$, при условиях, $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, x_0 = 0$.

Материалы опроса

1. Задача дискретной оптимизации.
2. Уравнение Беллмана.
3. Принцип максимума.
4. Уравнение Эйлера.

Контрольная работа №2

1. $\max \sum_{i=0}^3 (3x_i - u_i^2)$, при условиях $x_{i+1} = x_i + u_i, i = 0, 1, 2, x_0 = 0, u_i \in \mathbb{R}$.

2. Найти

$$\max \left(\sum_{i=0}^4 \ln(x_i u_i) \right)$$

при условиях $x_{i+1} = 2(1 - u_i)x_i, i = 0, 1, 2, x_0 = 8, 0 < u_i \leq 1$.

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Показатели и критерии оценивания компетенций с учетом этапа их формирования

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКр ОС I-1	Способность использовать методы решений дифференциальных уравнений для решения прикладных задач	ПКр ОС I – 1.1	Знает теоретические основы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
		ПКр ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные задачи с использованием ОДУ
ПКр ОС I-2	Способность использовать методы оптимизации для решения прикладных задач	ПКр ОС I – 2.1	Знает основы вариационного исчисления и теории оптимального управления
		ПКр ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные задачи оптимального управления

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПКр ОС I – 1.1	Знает теоретические основы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	В пределах основной литературы
ПКр ОС I – 1.2	Умеет решать прикладные задачи с использованием ОДУ	В пределах основной литературы
ПКр ОС I – 2.1	Знает основы вариационного исчисления и теории оптимального управления	В пределах основной литературы

ПКр ОС I – 2.2	Умеет решать прикладные задачи оптимального управления	В пределах основной литературы
----------------	--	--------------------------------

4.3.2. Типовые оценочные средства.

Типовые оценочные средства по модулю «Математический анализ (дополнительные главы)»

Вопросы для подготовки по дифференциальным и разностным уравнениям.

1. Привести примеры экономико-математических моделей, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями.
2. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме.
3. Дать определение уравнения с разделяющимися переменными и изложить метод его решения. Привести пример.
4. Дать определение однородного уравнения первого порядка и изложить метод его решения. Привести пример.
5. Дать определение уравнения первого порядка в полных дифференциалах и изложить метод его решения. Привести пример.
6. Дать определение линейного уравнения первого порядка и изложить методы его решения путем подстановки и путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.
7. Дать определение уравнения Бернулли и изложить метод его решения. Привести пример.
8. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения «n»-го порядка в нормальной форме.
9. Изложить методы понижения порядка дифференциальных уравнений на примерах уравнений второго порядка.
10. Дать определение линейного дифференциального уравнения. Привести пример.
11. Сформулировать алгоритм построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести пример.
12. Привести структуру общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения и сформулировать принцип суперпозиции его решений.
13. Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.
14. Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.
15. Дать определение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме с постоянными коэффициентами. Привести пример.
16. Изложить метод нахождения общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.
17. Изложить метод нахождения частного решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.
18. Дать определение фазовой траектории и устойчивости положения равновесия стационарной системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.
19. Изложить метод анализа устойчивости положения равновесия линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

20. Сформулировать критерий устойчивости нулевого решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Привести пример.
21. Сформулировать принцип исследования нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.
22. Изложить метод решения линейного разностного уравнения первого порядка путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.
23. Сформулировать алгоритм построения общего решения линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести пример.
24. Привести структуру общего решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка и сформулировать принцип суперпозиции его решений.
25. Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.
26. Дать определение системы линейных разностных уравнений первого порядка. Привести пример.
27. Изложить метод нахождения общего решения линейной однородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.
28. Изложить метод нахождения частного решения линейной неоднородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.
29. Изложить метод анализа устойчивости положения равновесия линейной однородной системы двух разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Вопросы для подготовки к экзамену по элементам функционального анализа и теории оптимального управления

Теоретические вопросы

1. Функционал. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство.
2. Расстояния на множестве непрерывных функций. Пространство $C[a, b]$.
3. Пространства $C[a, b]$, $C^1[a, b]$, $C^k[a, b]$.
4. Сходимость в метрическом пространстве.
5. Равномерная сходимость и сходимость в среднем.
6. Полные метрические пространства. Примеры полных метрических пространств.
7. Непрерывность функционала. Вариация функционала.
8. Экстремум функционала.
9. Уравнение Эйлера.
10. Математическая модель задачи Рамсея.
11. Элементы теории оптимального управления. Функция Понтрягина.
12. Дискретная оптимизация. Уравнения Беллмана.

Шкала оценивания.

Оценка формируется по результатам работы в семестре (результаты контрольных работ и опросов) и ответа на экзамене в пропорции 60% к 40%.

4.4. Методические материалы по проведению промежуточной аттестации
Список билетов

Билет 1.

1. Задача.

2. Функционал. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство.

Билет 2.

1. Задача

2. Расстояния на множестве непрерывных функций. Пространство $C[a, b]$.

Билет 3.

1. Задача

2. Пространства $C[a, b]$, $C^1[a, b]$, $C^k[a, b]$.

Билет 4.

1. Задача

2. Сходимость в метрическом пространстве.

Билет 5.

1. Задача

2. Равномерная сходимость и сходимость в среднем.

Билет 6.

1. Задача

2. Полные метрические пространства. Примеры полных метрических пространств.

Билет 7.

1. Задача

2. Непрерывность функционала. Вариация функционала.

Билет 8.

1. Задача

2. Экстремум функционала.

Билет 9.

1. Задача

2. Уравнение Эйлера.

Билет 10.

1.Задача

2.Математическая модель задачи Рамсея.

Билет 11.

1.Задача

2.Элементы теории оптимального управления. Функция Понтрягина.

Билет 12.

1.Задача.

2.Дискретная оптимизация. Уравнения Беллмана.

Билет 13.

1.Дать определение основных понятий теории дифференциальных уравнений. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме.

2.Изложить метод решения линейного разностного уравнения первого порядка путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.

Билет 14.

1.Дать определение уравнения с разделяющимися переменными и изложить метод его решения. Привести пример.

2.Сформулировать алгоритм построения общего решения линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Билет 15.

1.Дать определение однородного уравнения первого порядка и изложить метод его решения. Привести пример.

2.Привести структуру общего решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка и сформулировать принцип суперпозиции его решений.

Билет 16.

1.Дать определение линейного уравнения первого порядка и изложить методы его решения путем подстановки и путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.

2.Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.

Билет 17.

1.Дать определение уравнения Бернулли и изложить метод его решения. Привести пример.

2.Изложить метод нахождения общего решения линейной однородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Билет 18.

1.Изложить методы понижения порядка дифференциальных уравнений на примерах уравнений второго порядка.

2.Изложить метод нахождения частного решения линейной неоднородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.

Билет 19.

1.Дать определение линейного однородного дифференциального уравнения и привести структуру его общего решения. Привести пример.

2.Изложить метод решения линейного разностного уравнения первого порядка путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.

Билет 20.

1.Сформулировать алгоритм построения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести пример.

2.Изложить метод анализа устойчивости положения равновесия линейной однородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Билет 21.

1.Привести структуру общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения и сформулировать принцип суперпозиции его решений.

2.Сформулировать алгоритм построения общего решения линейного однородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Билет 22.

1.Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.

2.Привести структуру общего решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка и сформулировать принцип суперпозиции его решений.

Билет 23.

1.Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.

2.Изложить метод нахождения общего решения линейной однородной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

Билет 24.

1.Изложить метод нахождения общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Привести пример.

2.Изложить метод нахождения частного решения линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.

Билет 25.

1.Изложить метод нахождения частного решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Привести пример.

2.Изложить метод решения линейного разностного уравнения первого порядка путем вариации произвольной постоянной. Привести пример.

5. Методические указания для обучающихся по освоению модуля

Методические указания по выполнению домашнего задания по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения»

Для успешного усвоения дисциплины студенту необходимо регулярно заниматься самостоятельной работой: аудиторной и внеаудиторной. Студент регулярно должен прорабатывать темы лекционных занятий, занимаясь с конспектом лекций и рекомендованной литературой. Для отработки умения решения дифференциальных и разностных уравнений необходимо регулярно решать дополнительные (не разбираемые на семинарских занятиях) задачи.

В результате студент должен продемонстрировать знание основных теоретических понятий, методов решения дифференциальных и разностных уравнений, умение применять их при выполнении контрольных работ и решении задач, способность грамотно и четко формулировать их содержание на экзамене. Кроме того, при решении задач студент должен продемонстрировать умение логически верно строить рассуждение и обосновывать полученные результаты.

Методические указания по подготовке к контрольной работе

Любая контрольная работа проводится по всему пройденному к моменту написания данной работы материалу.

Отсчет времени, отведенного на письменную работу, идет по завершении процедуры размещения студентов и раздачи заданий. Студент обязан являться на письменный контроль в указанное в расписании время. В случае опоздания время, отведенное на письменный контроль знаний, не продлевается.

При себе студенты могут иметь только письменные принадлежности. Необходимую для выполнения работы бумагу выдает преподаватель.

Преподаватель раздает варианты по разработанной схеме. Листы с заданиями должны быть повернуты текстом вниз, чтобы студенты до окончания процедуры раздачи не могли начать выполнение работы. По окончании раздачи вариантов студентам разрешается перевернуть текст задания и одновременно приступить к выполнению работы. По окончании отведенного времени студенты одновременно заканчивают выполнение работы. Если работа завершена существенно раньше срока, то по разрешению преподавателя студент может покинуть аудиторию досрочно.

Мобильные телефоны должны быть выключены и убраны со столов, допускается использование калькуляторов, выполняющих только простые арифметические вычисления. Во время проведения письменного контроля знаний студентам не разрешается пользоваться учебными программами, справочниками и прочими источниками информации.

Использование материалов, а также попытка общения с другими студентами или иными лицами, в том числе с применением электронных средств связи, несанкционированные перемещения и т.п. являются основанием для удаления студента из аудитории и последующего проставления в ведомость оценки «неудовлетворительно». Любое обнаружение списывания заданий, выявленное в процессе проведения контрольного мероприятия или при проверке работ, влечет выставление оценки «неудовлетворительно» за всю контрольную работу.

Во время проведения письменного контроля знаний студентам разрешается покинуть аудиторию только при условии сдачи работы в объеме, выполненном к моменту выхода из аудитории. Дальнейшее продолжение работы запрещается.

Методические указания по самостоятельной работе

№ п/п	Тип занятия	Указания
Тема 1. Экономико-математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. Дифференциальные уравнения первого порядка.		
1	ПЗ	Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения (уравнение с разделяющимися переменными, однородное уравнение, уравнение в полных дифференциалах). Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной. Уравнение Бернулли.
Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.		
2	ПЗ	Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.
Тема 3. Системы линейных дифференциальных уравнений.		
3	ПЗ	Линейная однородная система. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных. Методы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
Тема 4. Количественный и качественный анализ стационарных систем дифференциальных уравнений.		
4	ПЗ	Устойчивые и неустойчивые положения равновесия. Анализ однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух неизвестных. Исследование нелинейных стационарных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению.

№ п/п	Тип занятия	Указания
Тема 5. Экономико-математические модели, описываемые разностными уравнениями. Разностные уравнения первого порядка.		
5	ПЗ	Задача Коши, решение разностного уравнения первого порядка подстановкой. Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной).
Тема 6. Линейные разностные уравнения второго порядка.		
6	ПЗ	Алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.
Тема 7 Системы линейных разностных уравнений.		
7	ПЗ	Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.
Тема 8 Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.		
8	ПЗ	Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений.

Методические указания по выполнению домашнего задания по дисциплине «Элементы функционального анализа и теории оптимального управления»

Методические указания по выполнению домашнего задания: домашнее задание следует делать после занятия, по аналогии с разобранными задачами на практическом занятии.

Методические указания по подготовке к опросу: готовясь к опросу, следует в первую очередь, выучить и понять основные определения и формулировки теорем. Затем следует изучить доказательства и разобрать примеры. Особое внимание следует уделить темам, имеющим непосредственные приложения к экономическим дисциплинам.

Методические указания по подготовке к контрольной работе: при подготовке к контрольной работе следует решить рекомендованные преподавателем задачи, проработать материалы практических занятий.

Методические указания для самостоятельной работы

Тема 1. Элементы функционального анализа

Функционал. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство.

Расстояния на множестве непрерывных функций. Пространство $C[a, b]$.

Пространства $C[a, b]$, $C^1[a, b]$, $C^k[a, b]$. Сходимость в метрическом пространстве.

Равномерная сходимость и сходимость в среднем. Полные метрические пространства.

Примеры полных метрических пространств.

Тема 2. Элементы вариационного исчисления

Непрерывность функционала. Вариация функционала. Экстремум функционала.

Уравнение Эйлера. Математическая модель задачи Рамсея. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.

Тема 3. Элементы теории оптимального управления

Функция Понтрягина. Принцип максимума Понтрягина. Вариационное исчисление и принцип максимума.

Тема 4. Дискретная оптимизация

Задача дискретной оптимизации. Уравнение Беллмана. Принцип максимума. Уравнение Эйлера.

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по модулю

6.1. Основная литература.

1. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. - М.: Астрель, 2010. - 558 с. - ISBN 978-5-271-03601-9: 364-87.
2. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Юрайт, 2012. - 909 с.
<http://www.iprbookshop.ru/52071.html?replacement=1>
3. Романко В.К. Разностные уравнения: учебное пособие для экономистов. - М.: БИНОМ, 2006 - 112 с.
4. Чирский В.Г., Шилин К.Ю. Математический анализ и инструментальные методы решения задач. -М.: Издательский дом ДЕЛО. -2019. - 270с
5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. В 2-х частях. Ч. 1 / Г. М. Фихтенгольц. - Изд. 8-е, стер. - СПб.: Лань, 2006. - 448 с. - ISBN 5-8114-0190-6: 249-50.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. В 2-х частях. Ч. 2 / Г. М. Фихтенгольц. - Изд. 8-е, стер. - СПб.: Лань, 2006. - 464 с. - ISBN 5-8114-0191-4: 249-50.
7. Ильин, В. А. Математический анализ: в 2 ч.: учебник: гриф МО. Ч. 1 / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Сендов Бл. Х.; под ред. А. Н. Тихонова. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: Проспект, 2007. - 672 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-482-01426-4: 128-00.
8. Ильин В. А. Математический анализ: в 2 ч.: учебник: гриф МО. Ч. 2 / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Сендов Бл. Х.; под ред. А. Н. Тихонова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Проспект, 2007. - 368 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-482-01431-8: 128-00.
9. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. - М.: Астрель, 2010. - 558 с. - ISBN 978-5-271-03601-9:364-87
10. Ушаков В.К. Математика. Основы теории дифференциальных уравнений. (учебное пособие).- М.: Издательский дом НИТУ «МИСиС», 2018. - 102 с.
11. М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. Вариационное исчисление. -М.-2009.- URSS.-169с.

6.2. Дополнительная литература.

1. А. Ф. Филиппов. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник: допущено М-вом образования РФ для студентов, обуч. по физико-математическим направлениям и специальностям М.: КомКнига, 2007
2. Татарников О.В. Математика для экономистов. Практикум. Учебное пособие для академического бакалавриата. – М.: Юрайт, 2014. – 285 с.
3. А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005

6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Отдельное обеспечение не предусмотрено.

6.4. Нормативные правовые документы.

Не предусмотрены.

6.5. Интернет-ресурсы.

1. www.nlr.ru - Российская национальная библиотека.
2. www.nns.ru - Национальная электронная библиотека.
3. www.rsl.ru - Российская государственная библиотека.
4. www.tests.specialist.ru - Центр компьютерного обучения МГТУ им. Н.Э. Баумана.
5. www.techlibrary.ru – Техническая библиотека.
6. <http://lms.ranepa.ru>

6.6. Иные источники.

Не предусмотрены.

7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

1. Компьютерный класс
2. Доступ в интернет и локальную сеть Академии
3. Проекционное оборудование
4. Доска