Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Институт бизнеса и делового администрирования

Факультет международного бизнеса и делового администрирования

УТВЕРЖДЕНА
решением Ученого совета ИБДА
Протокол от «13» сентября 2018 г.
№ 4

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.07.01 Теоретико-игровые методы в управлении человеческими ресурсами

38.03.03 Управление

Управление человеческими ресурсами в международном бизнесе

Бакалавр

Очная форма обучения

Год набора – 2019

Москва, 2018

Автор(ы)–составитель(и):
К.физ-мат.н., доцент кафедры количественных методов в менеджменте ИБДА
В.Л. Миронов

Заведующий кафедрой количественных методов в менеджменте ИБДА
д.э.н., профессор Чеканский А.Н.

СОДЕРЖАНИЕ:

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

1.1. Дисциплина **Б1.В.ДВ.07.01 Теоретико-игровые методы в управлении человеческими ресурсами** обеспечивает овладение следующими компетенциями с учетом этапа:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПК-10	владение навыками количественного и качественного анализа информации при принятии управленческих решений, построения экономических, финансовых и организационно-управленческих моделей путем их адаптации к конкретным задачам управления	ПК-10.1	Построение теоретико-игровых моделей и нахождение в каждой из них равновесных (оптимальных) стратегий

В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

Обобщенные трудовые функции	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
Умение анализировать количественные и качественные показатели деятельности организации	ПК-10.1	<u>на уровне знаний</u> - основных принципов классификации теории игр; - основных понятий и результатов, относящихся к антагонистическим играм, играм с природой, биматричным играм, позиционным играм, кооперативным играм
		<u>на уровне умений</u> - классифицировать игровые ситуации - самостоятельно формулировать и решать задачи теории игр - на основе реального конфликта составлять его теоретико-игровую модель - на базе основного курса теории игр осваивать новые разделы теории игр, если этого потребует практическая деятельность
		<u>на уровне навыков</u> - решения стандартных задач теории игр - владеть методами построения математических моделей конфликта в бизнесе и управлении - владеть методами принятия оптимального решения в условиях конфликта

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся и место дисциплины в структуре образовательной программы.

Объем дисциплины

Учебным планом для дисциплины **Б1.В.ДВ.07.01 Теоретико-игровые методы в управлении человеческими ресурсами** установлено:

- трудоемкость дисциплины– 1 з.е.,
- контактная работа с преподавателем – 34 часов
- самостоятельная работа – 2 часа.

Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина **Б1.В.ДВ.07.01 Теоретико-игровые методы в управлении человеческими ресурсами**, предназначена для студентов 1-го курса, изучается во 2 семестре.
Дисциплина реализуется после изучения следующих дисциплин:

- Математика (1 семестр)

Форма промежуточной аттестации – зачет.

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и видов учебных занятий и структура дисциплины

(очная форма обучения)

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
			Л	ЛР	ПЗ	КСР		
Тема 1	Классификация игр, формы их представления	4	4					О,КР1
Тема 2	Антагонистические игры в чистых стратегиях	4	4					О,КР1
Тема 3	Антагонистические игры в смешанных стратегиях	4	4					О,КР1
Тема 4	Игры с природой		4				1	О,КР2
Тема 5	Неантагонистические (биматричные) игры	5	4				1	О,КР3
Тема 6	Позиционные игры	4	4					О
Тема 7	Кооперативные игры	10	10					О
Промежуточная аттестация								**зачет**
Всего:		**36**	**34**				**2**	

Содержание дисциплины

Тема 1. Классификация игр, формы их представления

Общее понятие теории игр, как математической модели конфликтных ситуаций. Классификация игр по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимоотношений игроков, характеру выигрышей, количеству ходов, уровню доступной информации, по виду функции выигрыша. Содержательные примеры игровых ситуаций.

Тема 2. Антагонистические игры в чистых стратегиях

Формальное определение игры. Представление игры в матричной форме. Отношение доминирования. Понятия максимина и минимакса. Верхняя и нижняя цена игры. Равновесная ситуация, седловые точки, решение игры в чистых стратегиях. Примеры игр, имеющих и не имеющих седловые точки в чистых стратегиях

Тема 3. Антагонистические игры в смешанных стратегиях

Понятие смешанных стратегий в игре. Ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Теорема фон Неймана о существовании равновесия в смешанных стратегиях. Теорема об активных стратегиях. Аналитический и графический методы решения матричной игры 2×2. Игры 2×n и m×2. Доминирование стратегий. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования. Приближённые (итерационные) методы решения матричных игр.

Тема 4. Игры с природой

Понятие игры с природой (элементы теории статистических решений). Понятие риска игрока и матрицы рисков. Критерии принятия решений в играх с природой. Планирование эксперимента в условиях неопределённости

Тема 5. Неантагонистические (биматричные) игры

Рекомендации по оформлению и анализу бизнес-плана. Составление инвестиционной заявки Понятие биматричной игры. Смешанные стратегии и равновесие в биматричных играх. Теорема Нэша о существовании равновесия в биматричных играх. Отношение доминирования в биматричных играх. Биматричная игра с матрицами выигрышей 2×2. Пример, «Дилемма заключённого».

Тема 6. Позиционные игры

Понятие позиционной игры. Нормализация позиционной игры. Позиционные игры с неполной информацией. Позиционные игры с полной информацией, теорема Нэша о существовании равновесия в позиционных играх с полной информацией. Примеры принятия организационно-управленческих решений с помощью позиционных игр

Тема 7. Кооперативные игры

Понятие кооперативной игры. Формализация кооперативных игр. Понятие дележа для кооперативных игр. Обзор некоторых концепции оптимальных дележей: оптимальность по Парето, С-ядро, вектор Шепли. Оптимальность по Парето, примеры решения многокритериальных задач с помощью критерия Парето. Понятие ядра. Понятие вектора Шепли. Основная теорема о векторе Шепли. Связь вектора Шепли и ядра.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации

4.1.1. В ходе реализации дисциплины **Б1.В.ДВ.07.01 Теоретико-игровые методы в управлении** используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1. Классификация игр, формы их представления	Опрос, Контрольная работа 1
Тема 2. Антагонистические игры в чистых стратегиях	Опрос, Контрольная работа 1
Тема 3. Антагонистические игры в смешанных стратегиях	Опрос, Контрольная работа 1
Тема 4. Игры с природой	Опрос, Контрольная работа 2

Тема 5. Неантагонистические (биматричные) игры	Опрос, Контрольная работа 3
Тема 6. Позиционные игры	Опрос
Тема 7. Кооперативные игры	Опрос

4.1.2. Зачет проводится в письменной форме.

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

Тема 1. Классификация игр, формы их представления

1. Изложить историю возникновения и развития теории игр.
2. Описать классификацию игр по различным признакам.
3. Привести содержательные примеры игровых ситуаций («Орлянка», «Дилемма заключённого», «Семейный спор», «Оборона города» и др.)

Тема 2. Антагонистические игры в чистых стратегиях

4. Привести общее определение игры, антагонистической игры. Определить игры в матричной форме, привести примеры таких представлений. Изложить метод сокращения размерности игры, определить отношение доминирования.
5. Определить понятия: стратегии и оптимальной стратегии игрока, нижней (максимин) и верхней (минимакс) цены игры, равновесной ситуации и седловой точки.
6. Изложить метод решение игровых задач в чистых стратегиях.
7. **(Уплата налога).** В конфликтной ситуации участвуют две стороны: A – государственная налоговая инспекция и B – налогоплательщик с определённым годовым доходом, налог с которого составляет t усл.ед.

   У стороны A два способа поведения. Один способ (A_1) состоит в том, чтобы контролировать доходы B и взимать с него:

– налог в размере t, если доход заявлен и соответствует действительному;

– налог в размере t и штрафа в размере s, если заявленный доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Второй способ (A_2) поведения A состоит в том, чтобы не контролировать доходы B вовсе.

У стороны B три способа поведения:

B_1 – заявить о действительном доходе;

B_2 – заявить доход, меньше действительного, и, следовательно, налог k с заявленного дохода будет меньше t;

B_3 – скрыть доход и не платить налог вовсе.

a) Составить матрицу выигрышей игрока A.

b) Найти нижнюю и верхнюю цену игры, а также оптимальные стратегии (если они есть) игроков A и B.

c) Описать (на содержательном уровне) последствия для каждого из игроков, отклонения от своих оптимальных стратегий.

8. **(Противовоздушная оборона).** Система противовоздушной обороны – ПО (игрок A) имеет своей целью поражение как можно большего количества самолётов противника (игрока B). Задача противника – преодолеть ПО, потеряв при этом как можно меньше самолётов.

Система ПО покрывает всю обороняемую территорию, располагая двумя ракетными комплексами (РК), зоны действия которых не пересекаются. Каждый РК обязательно поражает самолёт противника в зоне своего действия лишь в том случае, если система наведения РК начинает отслеживать цель ещё за пределами своей зоны.

Противник располагает двумя самолётами, каждый из которых может быть направлен в зону действия любого РК. Каждый самолёт может совершать обманный манёвр, т.е. при подлёте к зоне действия выбранного им РК самолёт способен изменить маршрут и войти в зону действия другого РК. При этом лётчик не знает, какой из двух РК начал отслеживать его самолет, поэтому обманный манёвр может привести самолёт в зону действия РК, уже отслеживающую этот самолет, и он будет сбит.

a) Составить матрицу выигрышей игрока A, предварительно описав стратегии игроков. Для этого можно занумеровать $РК$ и самолёты противника: $РК_1, РК_2$; C_1, C_2, считая, что при начальном курсе (т.е. до обманных манёвров) номер самолёта совпадает с номером $РК$, в зону которого он направляется. Можно считать, что выигрыш игрока A в ситуации (A_i, B_j) равен числу сбитых самолётов.

b) Найти нижнюю и верхнюю цену игры, а также оптимальные стратегии (если они есть) игроков A и B.

c) Описать (на содержательном уровне) последствия для каждого из игроков, отклонения от своих оптимальных стратегий.

9. (Чистые стратегии). Для матрицы игры α определить нижнюю и верхнюю цену игры, а так же максиминные и минимаксные стратегии игроков A и B соответственно.

a) Определить нижнюю и верхнюю цену игры, а так же максиминные и минимаксные стратегии игроков A и B соответственно.

b) Изменить только один элемент матрицы α (указать какой именно) так, чтобы после изменения игра имела решение в чистых стратегиях. Найти это решение (оптимальные стратегии и цену игры).

c) Объяснить, почему игрокам A и B не выгодно отклоняться от своих оптимальных стратегий (имеется в виду игра, соответствующая матрице, найденной в задании (b)).

(1) $\alpha =$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	2
A_2	0	2	2	−1
A_3	1	3	4	1
A_4	5	0	0	1

(2) $\alpha =$

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−2	3	−1	0
A_2	1	0	2	1
A_3	0	3	5	0

10. (Борьба за политическое влияние). Каждая из двух европейских стран (A и B) пытается усилить своё политическое влияние в некотором регионе и тем самым ослабить влияние другой страны.

Для достижения своей цели страна B ведёт переговоры об экономическом сотрудничестве с тремя странами этого региона – B_1, B_2, B_3 (можно считать, что стратегии игрока B – это B_1, B_2, B_3).

Страна A хочет помешать B одним из двух способов: A_1 – предложить странам B_1, B_2, B_3 более выгодные условия сотрудничества; A_2– скомпрометировать страну B перед странами B_1, B_2, B_3.

Действие A_1 приводят к положительному результату (для страны A) с вероятностями 0,7; 0,5; 0,3 для стран B_1, B_2, B_3 соответственно, а действие A_2– с вероятностями 0,6; 0,9; 0,4 для стран B_1, B_2, B_3 соответственно.

a) Составить матрицу выигрышей игрока A.

b) Решить игру из п. (a).

c) Интерпретировать полученное в п. (b) решение в содержательных терминах данной задачи.

d) Объяснить, почему ни одной из стран A и B невыгодно отклоняться от своих оптимальных стратегий.

Тема 3. Антагонистические игры в смешанных стратегиях

11. Объяснить вероятностный смысл смешанной стратегии игрока. Привести примеры смешанных стратегий.

12. Определить понятия: оптимальной смешанной стратегии, ситуации равновесия в смешанных стратегиях. Привести простейшие примеры на нахождение решения игры в смешанных стратегиях.

13. Объяснить содержательный смысл теоремы фон Неймана и теоремы об активных стратегиях.

14. Изложить методы решения (для конкретных примеров) матричных игр 2×2, $2\times n$ и $m\times2$.

15. Изложить общую формулировку задачи линейного программирования. Изложить метод сведение матричной игры к задаче линейного программирования.

16. Изложить приближённые (итерационные) методы решения матричных игр.

17. (Смешанные стратегии). Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ A_2 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$ и

пусть $P^* = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$; $Q^* = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ – смешанные стратегии игроков A и B соответственно.

a) Определить выигрыш игрока A в следующих игровых ситуациях: (P^*, Q^*); (P^*, B_1); (P^*, B_2); (P^*, B_3); (A_1, Q^*); (A_2, Q^*).

b) Показать, что игровые ситуации (P^*, B_2) и (P^*, B_3) не могут быть оптимальными стратегиями для игроков A и B?

c) Показать, что цена игры равна $v = H(P^*, Q^*) = 0{,}625$, а стратегии $P^* = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$; $Q^* = (\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4})$ – оптимальны.

d) Решить игру графическим методом.

18. (Игра 2×2). Для следующих матриц найти решение игры (цену игры – v и оптимальные стратегии – (P^0, Q^0)) аналитическим и графическим методами:

a) $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & -2 & 4 \\ A_2 & 5 & -3 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 5 & 3 \\ A_2 & 1 & 2 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & -3 & -3 \\ A_2 & 4 & 4 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 2 & -3 \\ A_2 & 2 & 4 \end{array}$ **e)** $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 1 & 4 \\ A_2 & 3 & 1 \end{array}$

19. (Игра $2\times$n). Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ A_2 & 1 & 6 & -2 & 3{,}5 \end{array}$

a) Найти решение игры (цену игры – v и оптимальные стратегии – (P^0, Q^0)) графическим методом.

b) Доказать (<u>аналитически</u>, используя свойства оптимальных стратегий), что стратегии (P^0, Q^0), найденные в задании (a) являются оптимальными.

20. (Игра $\mathbf{m \times 2}$). Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 4 & 3 \\ A_2 & 2 & 4 \\ A_3 & 0 & 5 \\ A_4 & -1 & 6 \end{array}$

a) Найти решение игры (цену игры – v и оптимальные стратегии – (P^0, Q^0)) графическим методом.

b) Доказать (<u>аналитически</u>, используя свойства оптимальных стратегий), что стратегии (P^0, Q^0), найденные в задании (а) являются .

21. (Приближённое решение игры). Для матрицы игры α найти приближённое решение, при котором разница между верхней и нижней ценой игры не превосходит 8, т.е. $\bar{v} - \underline{v} \le 8$. Для определённости считаем, что на первом шаге игрок *A* применяет стратегию A_3.

$$\alpha = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_2 \\ \hline A_1 & 40 & 10 & 30 \\ A_2 & 30 & 50 & 20 \\ A_3 & 0 & 60 & 80 \end{array}$$

22. (Рыночная конкуренция). Два конкурирующих предпринимателя (игроки *A* и *B*) поставляют на рынок товары двух видов: A_1, A_2 и B_1, B_2 – соответственно. Предприниматель *A* располагает данными о том, какова вероятность продать тот или иной товар при наличии на рынке товаров конкурента *B*. Если эти вероятности рассматривать в качестве выигрышей *A*, то они образуют следующую матрицу игры

$$\alpha = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ A_2 & 0{,}7 & 0{,}3 \end{array}$$

a) Найти приближённо с точностью до 0,1 (т.е. $\bar{v} - \underline{v} \le 0{,}1$) оптимальные значения вероятностей поставки предпринимателями на рынок товаров 1-го и 2-го вида, если сначала предприниматель А поставляет на рынок товар 2-го вида, а В – 1-го вида.

b) Проверить результаты полученные в п. (а), найдя точное решение игры для матрицы α.

c) Интерпретировать полученное в п. (а) решение для предпринимателя *A* в содержательных терминах данной задачи.

23. Верно ли, что если v – цена некоторой игры, то любая смешанная стратегия $(P^*; Q^*)$, для которой $H(P^*; Q^*) = v$, является оптимальной для этой игры?

24. Доказать, что если игра 2×2 не имеет седловой точки (т.е. нет решения в чистых стратегиях) и (P^0, Q^0) – оптимальные смешанные стратегии игры, то ни одна из стратегий (P^0, Q^0) не является чистой.

25. Показать, что для любой матричной антагонистической игры нижняя цена игры не превосходит верхнюю цену игры, т.е. $\underline{v} \le \bar{v}$.

26. Построить график функции $v = v(a)$, где $v(a)$ – цена игры $\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 5 & a \\ A_2 & 3 & 2 \end{array}$.

27. Доказать, что если (A_α, B_β) (A_α, B_β) – седловая точка игры $m \times n$, то выполняется неравенство: $H(A_i, B_\beta) \le H(A_\alpha, B_\beta) \le H(A_\alpha, B_j),\ где\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$ (аналог условия оптимальности для смешанных стратегий).

28. Могут ли для одного игрока существовать две оптимальные стратегии – одна чистая, а другая смешанная?

29. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: если (P_1, Q_1) и (P_2, Q_2) – оптимальные стратегии, то (P_1, Q_2) и (P_2, Q_1) также оптимальные стратегии.

30. Проверить, что $v = 2$ – цена игры, а $P^0 = (0{,}0{,}1)$; $Q^0 = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0)$ – оптимальные стратегии в игре с матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	−2	4
A_2	−1	4	2
A_3	2	2	6

31. Найти оптимальную стратегию игрока *B*, если известна цена игры $v = 1$ и оптимальная стратегия игрока *A*: $P^0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ в игре с матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	−1	3	−3
A_2	2	0	3
A_3	2	1	0

Тема 4. Игры с природой

32. Определить игры с природой, как задачу теории статистических решений, привести примеры таких задач.

33. Определить понятие риска игрока, матрицы рисков для конкретных примеров.

34. Различные критерии принятия решений в играх с природой; максиминный критерий Вальда, критерий минимального риска Сэвиджа, критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Примеры применения этих критериев.

35. При игре с природой задана платежная матрица $A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 4 & 6 \\ 12 & 18 & 5 & 22 \\ 14 & 12 & 18 & 11 \\ 6 & 21 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.

a) Определить матрицу рисков *R* и оптимальные стратегии первого игрока при использовании им a) критерия максимакса; b) критерия Вальда; c) критерия Сэвиджа и d) критерия Гурвица с коэффициентом пессимизма *p*=0,1. Какой вывод можно сделать из полученных результатов?
b) Определить оптимальную стратегию при известном векторе вероятностей состояний природы $\boldsymbol{P} = (0{,}1; 0{,}3; 0{,}2; 0{,}2)$.

Тема 5. Неантагонистические (биматричные) игры

36. Ввести понятие биматричной игры.

37. Определить смешанные стратегии и равновесие в биматричных играх.

38. Сформулировать теорему Нэша о существовании равновесия в биматричных играх.

39. Определить отношение доминирования в биматричных играх.

40. Изложить метод решения биматричной игры с матрицами выигрышей 2×2.

41. Рассмотреть «Дилемму заключённого».

42. Биматричная игра задана платежными матрицами игроков $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$.

a) Для платёжных матриц *A* и *B* выписать систему из четырёх неравенств (в общем виде и для конкретных матриц), определяющую равновесные ситуации биматричной игры.
b) На графике (в системе координат *Opq*) изобразить две кривые, первая из которых соответствует системе первых двух неравенств, а вторая кривая – последним двум неравенствам из задания 1.

c) Используя графики из задания 2 найти все равновесные ситуации игры (если они есть) и величину выигрыша для каждого игрока в каждой из найденных ситуаций.

d) На примере одной из равновесных ситуаций, найденных в задании 3 показать, что для игрока *A* отклонение от состояния равновесия может лишь уменьшить его выигрыш при условии, что игрок *B* сохраняет своё равновесие.

e) Найти все ситуации оптимальные по Прето (в классе чистых стратегий). Есть ли ситуации: оптимальные по Парето, но неравновесные по Нэшу; равновесные по Нэшу, но неоптимальные по Парето; равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето?

43. *Игра «Студент – Преподаватель».*

Игрок *A* – студент: стратегия A_1– подготовиться к сдаче зачёта; стратегия A_2– не подготовиться к сдаче зачёта. Игрок *B* – преподаватель: стратегия B_1– поставить зачёт; стратегия B_1– не поставить зачёт.

a) Составить платёжные матрицы *A* и *B* самостоятельно, задав значения функции выигрыша игроков *A* и *B* (т.е. $H_A(A_i, B_j) = a_{ij}$ и $H_B(A_i, B_j) = b_{ij}$; $i, j = 1,2$).
b) Решить биматричную игру с платёжными матрицами *A* и *B*, составленными в задании (a).
c) На примере одной из равновесных ситуаций, найденных в задании (b) показать, что для студента отклонение от состояния равновесия может лишь ухудшить его положение при условии, что преподаватель сохраняет своё равновесие.
d) Показать (по определению), что ситуация $P^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $Q^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ не является равновесной.

44. Решить биматричную игру, заданную платёжными матрицами

$$A = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 1 & 4 \\ A_2 & 6 & 3 \end{array} \quad \text{и} \quad B = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 5 & 4 \\ A_2 & 2 & 5 \end{array},$$

т.е. найти все равновесные ситуации игры (если они есть) и величину выигрыша для каждого игрока в каждой из найденных ситуаций.
45. Биматричная игра задана своими платёжными матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что ситуация $(P^0 = (0{,}375; 0; 0{,}625);\ Q^0(0{,}2; 0; 0{,}08))$ является равновесной и найти величину выигрыша для каждого игрока в этой ситуаций.

46. Биматричная игра задана матрицами $A = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 5 & 3 \\ A_2 & 2 & 4 \end{array}$ и $B = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 1 & 7 \\ A_2 & 4 & 1 \end{array}$.

a) Показать, что игра имеет единственную равновесную ситуацию, найти её и определить величину выигрыша для каждого игрока.
b) Разбить биматричную игру на две матричные игры с нулевой суммой, т.е. решить отдельно две антагонистические игры 2×2: с матрицей *A* и матрицей *B*.

c) Какой теоретический вывод можно сделать после сравнения результатов, полученных в заданиях a) и b)?

d) Найти все ситуации оптимальные по Парето (в классе чистых стратегий). Есть ли ситуации: оптимальные по Парето, но неравновесные по Нэшу; равновесные по Нэшу, но неоптимальные по Парето; равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето?

47. Показать, что в биматричной игре равновесная ситуация не всегда оптимальна для игроков. Оптимальна в том смысле, что если один из игроков придерживается своей равновесной ситуации, то он может не получить своего гарантированного выигрыша (в отличие от антагонистической игры), если второй игрок отклонится от своего равновесия.

48. Показать на примере биматричных игр 2×2, что множество равновесных ситуаций не является прямоугольным, т.е., если (P_1,Q_1) и (P_2,Q_2) – равновесные ситуации некоторой игры, то ситуации (P_1,Q_2) и (P_2,Q_1) уже могут не быть равновесными.

49. *Игра «перекрёсток».*
Два автомобиля двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрёстке. Каждый из них может остановиться (1-я стратегия) и ехать (2-я стратегия).

Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии и поехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой с матрицами

$$A=\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 1 & 1-\varepsilon \\ A_2 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{и} \quad B=\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 1 & 2 \\ A_2 & 1-\varepsilon & 0 \end{array},$$

где неотрицательное число ε соответствует неудовольствию от того, что игрок остановился и пропустил партнёра.

a) Решить игру *«перекрёсток»* для $\varepsilon=0{,}5$.

b) Показать, что ситуации $(A_1,B_2);(A_2,B_1)$ равновесны по Нэшу и оптимальны по Парето.

c) Показать, что ситуации (A_1,B_1) оптимальна по Парето, но не равновесна по Нэшу.

d) Выяснить, есть ли ситуации (в чистых стратегиях) равновесные по Нэшу, но не оптимальные по Парето?

e) Показать, что ситуации $P=(\frac{1}{3},\frac{2}{3});Q=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (для $\varepsilon=0{,}5$) равновесна по Нэшу, но не оптимальна по Парето.

f) Выяснить, выгодно ли каждому из игроков в отдельности (независимо от другого) придерживаться 2-й стратегии (игроку $A - A_2$, игроку $B - B_2$)?

50. Показать, что биматричная игра, заданная матрицами

$$A=\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} \end{array} \quad \text{и} \quad B=\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & b_{11} & b_{12} \\ A_2 & b_{21} & b_{22} \end{array},$$

имеет единственную равновесную ситуацию, если выполняются следующие четыре неравенства:

$$a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}>0;\ 0<\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}<1;\ b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}<0;\ 0<\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}<1.$$

При этом единственное равновесие достигается на смешанных стратегиях.

51. Привести содержательный пример биматричной игры 2×2, имеющей единственную равновесную ситуацию, причём это единственное равновесие достигается на смешанных стратегиях.
(*Указание. Можно воспользоваться утверждением задачи 8)*

52. Найти множество всех равновесных ситуаций (<u>в чистых стратегиях</u>) для биматричной игры с матрицами

$$A = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 2 & 0 & 5 \\ A_2 & 2 & 2 & 3 \end{array} \quad \text{и} \quad B = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 2 & 2 & 1 \\ A_2 & 0 & 7 & 8 \end{array}.$$

Тема 6. Позиционные игры

53. Определить понятие позиционной игры.

54. Объяснить что такое нормализация позиционной игры.

55. Определить позиционные игры с полной информацией.

56. Сформулировать теорему Нэша о существовании равновесия в позиционных играх с полной информацией.

57. Привести примеры принятия организационно-управленческих решений с помощью позиционных игр.

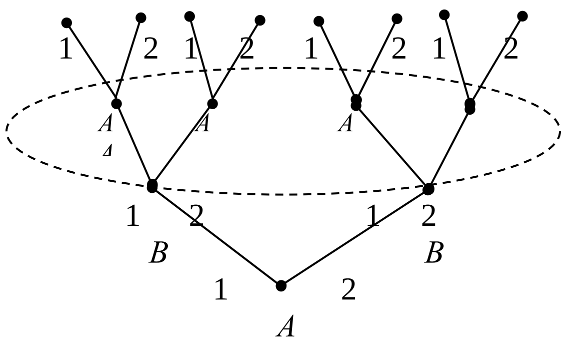
58. Перечислить все возможные варианты двухходовых позиционных игр (как с полной, так и неполной информацией), изобразив их в виде дерева игры двух игроков A и B (для определённости считаем, что 1-й ход всегда делает игрок A).

a) Для каждого дерева игры из задания 1 придумать содержательный смысл и функцию выигрыша $W(x, y)$.

b) Нормализовать каждую из игр задания 1.

c) Для каждой игры из задания 1 найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, используя нормализации из задания b). Дать содержательное толкование полученных результатов, используя задание a).

58. Пусть трёхходовая позиционная игра задана своим деревом (пунктиром объединены позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству):

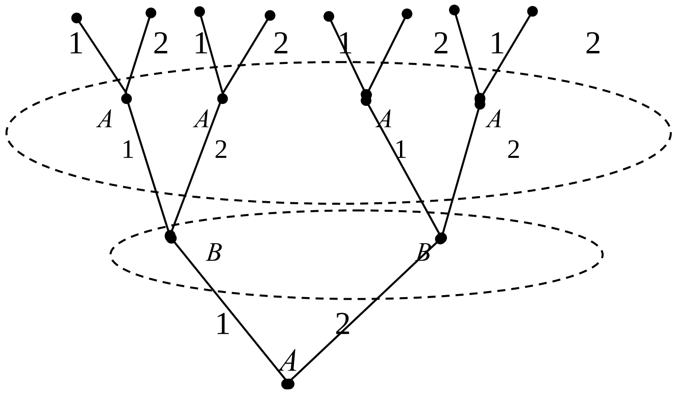


a) Дать описание каждого из трёх ходов этой игры и задать функцию выигрыша $W(x, y, z)$.

b) Нормализовать игру.

c) Придумать содержательную ситуацию, соответствующую этой игре.

59. Позиционная игра задана своим деревом (пунктиром объединены позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству):

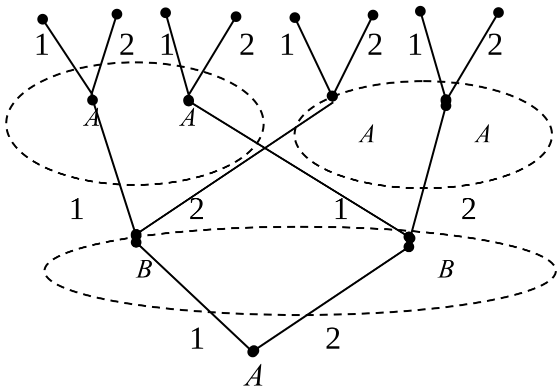


a) Нормализовать игру, предварительно задав функцию выигрыша $W(x, y, z)$.

b) Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, используя нормализации из задания а).

c) Придумать содержательную ситуацию, соответствующую этой игре.

60. Позиционная игра задана своим деревом (пунктиром объединены позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству):

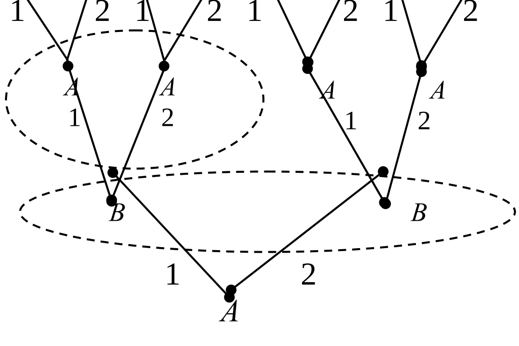


a) Нормализовать игру, предварительно задав функцию выигрыша $W(x, y, z)$.

b) Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, используя нормализации из задания а).

c) Придумать содержательную ситуацию, соответствующую этой игре.

61. Позиционная игра задана своим деревом (пунктиром объединены позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству):



a) Нормализовать игру, предварительно задав функцию выигрыша $W(x, y, z)$.

b) Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, используя нормализации из задания а).

c) Придумать содержательную ситуацию, соответствующую этой игре.

62. Позиционная игра задана описанием своих ходов.

1-й ход делает игрок A: он выбирает число x_1 из множества $\{1, 2\}$;

2-й ход делает игрок B: не зная о выборе игрока A на 1-м ходе, он выбирает число x_2 из множества $\{1, 2\}$;

3-й ход делает игрок A: забыв свой выбор на 1-м ходе и не зная о выборе игрока B на 2-м ходе, он выбирает число x_3 из множества $\{1, 2\}$;

4-й ход делает игрок B: не зная о выборе игрока A на 1-м и 3-м ходе и забыв свой выбор на 2-м ходе, он выбирает число x_4 из множества $\{1, 2\}$.

Функция выигрыша задаётся равенством $W(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1)^{x_1+x_2+x_3+x_4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

a) Нарисовать дерево игры, указав на нем информационные множества.

b) Нормализовать игру.

c) Выяснить, имеет ли игра седловую точку.

d) Описать отдельно действия каждого из игроков A и B в случае, если они применяют свои максиминные и минимаксные стратегии соответственно и пояснить, почему выбор этих стратегий не приводит к равновесной ситуации?

63. Рассмотреть следующую карточную игру, как позиционную.

Играют двое A и B. У каждого по три карты: у игрока A дама, король и туз красной масти, а у игрока B дама, король и туз чёрной масти. Игроки видят только свои карты и последовательно друг за другом выкладывают их на стол (начинает игрок A). Каждый игрок кладёт карту картинкой вниз, т.е. так, чтобы её не видел другой игрок. Когда все шесть карт выложены на стол они переворачиваются. Если в полученной последовательности окажутся рядом две карты одного достоинства, считается что победил игрок A и его выигрыш (и соответственно проигрыш игрока B) равен 1. В противном случае победил игрок B и его выигрыш (и соответственно проигрыш игрока A) равен 1.

a) Нарисовать дерево игры, указав на нем информационные множества.

b) Описать все стратегии игроков A и B.

c) Нормализовать игру.

d) Как вы думаете, можно ли считать эту игру справедливой? Ответ пояснить.

Тема 7. Кооперативные игры

64. Ввести понятие кооперативной игры (на содержательном уровне). Объяснить в чём состоит основная задача кооперативной игры.

65. Формализация кооперативных игр - введение понятий: коалиции, характеристической функции, игры в характеристической форме. Привести примеры игр в характеристической форме.

66. Ввести понятие дележа для кооперативных игр.

67. Определить оптимальность по Парето, как критерий эффективности дележей, геометрическая интерпретация (Парето-граница). Привести примеры решения многокритериальных задач с помощью критерия Парето.

68. Определить понятие ядра, привести примеры нахождения ядра. Изложить критику ядра: примеры бесконечного и пустого ядра.

69. Ввести понятие вектора Шепли и привести примеры его нахождения.

70. Сформулировать свойства вектора Шепли (аксиоматика Шепли).

71. Сформулировать основную теорему о векторе Шепли. Объяснить связь вектора Шепли и ядра.

72.Многокритериальная задача

Трое друзей, Антон, Борис и Виктор, решают, куда им пойти вместе на выходные. Имеются следующие варианты: кино, бар, боулинг, сауна, рыбалка, хоккей. Друзья имеют следующие предпочтения в отношении этих вариантов (запись $x \succ y$ означает, что x предпочтительнее y):

Антон: боулинг $\succ$ кино $\succ$ сауна $\succ$ бар $\succ$ рыбалка $\succ$ хоккей,

Борис: боулинг $\succ$ хоккей $\succ$ кино $\succ$ бар $\succ$ рыбалка $\succ$ сауна,

Виктор: кино $\succ$ бар $\succ$ рыбалка $\succ$ боулинг $\succ$ сауна $\succ$ хоккей.

Исходя из указанных предпочтений, можно каждому из исходов приписать некий подходящий уровень полезности. Например, можно нумеровать альтернативы натуральными числами, начиная с худшей альтернативы. Такой вариант задания функций полезности игроков представлен в таблице:

Таблица полезности для многокритериальной задачи 1

	кино	*бар*	*боулинг*	*сауна*	*рыбалка*	*хоккей*
Антон	*5*	*3*	*6*	*4*	*3*	*1*
Борис	*3*	*3*	*5*	*1*	*2*	*4*
Виктор	*5*	*4*	*2*	*1*	*3*	*1*

Используя принцип оптимальности по Парето, определить, какие варианты отдыха наиболее приемлемы для всей компании, т.е. найти Парето-границу данной многокритериальной задачи.

73.«Простой обмен»

У Даши есть фломастер, а у Гоши яблоко. Даша оценивает фломастер в 8, яблоко в 10. Гоша оценивает фломастер в 12, яблоко в 5. Оба может выбрать одно из двух действий: оставить свою вещь при себе или же отдать другому игроку. Если один из участников получает обе вещи, то его оценки складываются, а другого не имеет ничего (считаем, что он имеет «0») .

Выигрышем назовём каждую точку **(*x, y*)**, где ***x*** – это стоимость вещей у Даши, а ***y*** – это стоимость вещей у Гоши. Например, если Даша передаст фломастер Гоше, а Гоша отдаст своё яблоко Даше, то выигрыш в этой ситуации имеет вид: **(10, 12)**.

а) В системе координат ***XY*** указать все возможные выигрыши.

b) Среди точек, указанных в п. (а) выделить Парето-границу.

c) Если изменить условие задачи и считать, что у Даши не фломастер, а 8 денежных единиц, а Гоши – 5 и обмениваться они могут любыми суммами (для Даши – это сумма от 0 до 8, а для Гоши от 0 до 5), то, что в новых условиях является Парето-границей?

74. Привести содержательные примеры несупераддитивных игр.

75.«Решение акционеров»

Рассматривается корпорация из четырёх акционеров, имеющих акции соответственно в следующих размерах: $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30, a_4 = 40$.

Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырёх игроков, в которой выигрывающими являются следующие коалиции: {2; 4}, {3; 4},

{1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {2; 3; 4}, {1; 3; 4},

{1; 2; 3; 4}.

a) Найти вектор Шепли для этой игры и дать содержательную интерпретацию, полученного результата.

b) Найти вектор голосования акционеров, если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций.

76.«Строительство хранилищ»

Пусть трое потребителей должны построить хранилища продукции. Затраты на строительство зависят от объема хранилищ. Для постройки хранилищ потребители могут организовывать коалиции. Затраты на строительство одного хранилища коалицией S заданы характеристической функцией $v(S)$, которая принимает следующие значения:

Коалиция S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\upsilon(S)$	2	3	2,5	4	3,9	5	6

Используя вектор Шепли, определить число хранилищ и коалиции, которые их будут строить, при условии, что каждый из потребителей участвует в строительстве.

(***Указание***: *Следует определить вклад каждого потребителя (игрока) в коалиции:* {1, 2, 3}, {2, 3}, {1, 2}, {1}, {2}, {3}, *т.е. найти векторы Шепли для этих коалиций, а затем сравнить для каждого игрока полученные результаты, при условии, что в строительстве должны участвствовать все.)*

77.«Ботинки»

Есть 3 игрока, каждый из которых владеет левым ботинком, и есть еще 2 игрока, каждый из которых владеет правым ботинком. Каждый левый подходит к каждому правому. Одна полная пара ботинок стоит 1 рубль.

a) Задать игру «Ботинки» в характеристической форме и проверить характеристическую функцию на свойство супераддидивности.

b) Привести примеры дележей для игры «Ботинки» в характеристической форме.

c) Найти вектор Шепли для этой игры.

d) Найти ядро игры.

78.«Гномы и золото»

Группа из n гномов нашла много золотых слитков в пещере. Начинается обвал, поэтому нужно срочно убегать из пещеры. После обвала пещера окажется недоступной. Слитки золота тяжелы: в одиночку ни один гном не может нести слиток, но два гнома могут свободно нести один слиток. Снаружи пещеры слитки золота можно продать по цене 1 рубль за штуку.

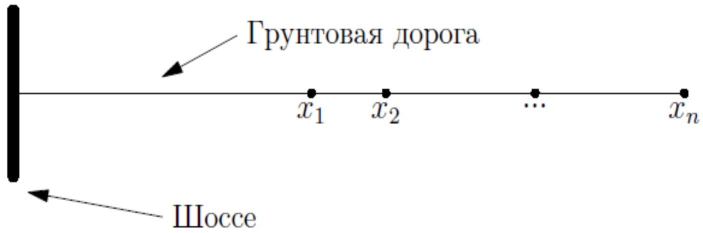
a) Найти вектор Шепли для $n = 3$ и $n = 4$.

b) Найти ядро для $n = 3$ и $n = 4$.

c) На содержательном уровне прокомментировать различие результатов, полученных в пп. (a) и (b).

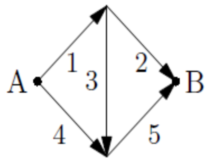
79. «Малое Гадюкино»

От шоссе до деревни Малое Гадюкино идет грунтовая дорога. Осенью дорога приходит в ужасное состояние, поэтому Малые Гадюкинцы на общем собрании решили заасфальтировать ее. При распределении затрат необходимо учесть тот факт, что деревня растянута вдоль дороги, и фактически Гадюкинцы живут на разных расстояниях от шоссе. Всего в Малом Гадюкино обитает n семей, на расстояниях от шоссе равных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ метров. За 1 рубль можно заасфальтировать 1 метр.



a) Найти вектор Шепли для $n = 3$.
b) Найти вектор Шепли для $n = 4$.
c) Найти вектор Шепли для произвольного n.

80.«Нефтепровод» Нефть можно доставить из точки А в точку Б по нефтепроводу. Собственники труб и пропускная способность труб в таблице:



Номер трубы	Пропускная способность	Владелец
1	2 л/час	Андрей
2	3 л/час	Борис
3	1 л/час	Володя
4	2 л/час	Борис
5	3 л/час	Андрей

Потребители нефти готовы платить 1 рубль за скорость передачи 1 литр/час.

Найти вектор Шепли, а затем прокомментировать полученный результат.

81. «Голосование в ООН»

Совет Безопасности ООН состоит из 15 членов. Пять членов Совета – постоянные (Россия, США, Великобритания, Франция и Китай), остальные десять членов – периодически меняются. Для принятия решения о применении санкций необходимо одобрение не менее 9 членов включая всех постоянных. В этой кооперативной игре выигрышем коалиции можно считать 1, если она может принять санкции, и 0, если не может.

a) Представить ситуацию голосования в Совете Безопасности ООН, как игру в характеристической, а затем найти вектор Шепли для этой игры.
b) Используя вектор Шепли, найденный в п. (а), определить, во сколько раз влияние постоянного члена сильнее, чем не постоянного?

82. «Количество голосов»

В стране N есть 5 провинций, разных по численности населения: 100, 100, 200, 300, 400 (тыс. чел.) Руководство страны состоит из 5 человек. Им даны голоса пропорционально численности провинции, т.е. 1, 1, 2, 3, 4 голоса, соответственно. Решение принимается, если за него подано не менее 8 голосов (из 11 возможных). В этой кооперативной игре выигрышем коалиции можно считать 1, если она может одобрить решение и 0, если не может.

Найдите вектор Шепли. Соответствует ли он численности населения?

83. «Банковский вклад»

У Ани - 70 рублей, у Бори - 80 рублей, у Вовы - 150 рублей. Процентная ставка по вкладу: 5% при сумме вклада в диапазоне [0; 100), 6% при сумме вклада в диапазоне [100; 200) и 7% при сумме вклада в диапазоне [200;∞). Если они соберутся вместе, то смогут расчитывать на ставку в 7%.

Как им поделить прибыль, используя вектор Шепли?

84. «Свойства ядра»

Рассмотрим игру 4-х игроков ($I=\{1,2,3,4\}$) с характеристической функцией v, которая задаётся следующим образом:

ценность большой коалиции равна 2, т.е. $v(I)=2$;

Ценность любой коалиции из 3-х игроков равна 1, т.е. $v(S)=1$ для $|S|=3$;

Ценность каждого отдельного игрока равна нулю, т.е. $v(i)=0$ при любых $i\in I$;

$v(\{1,2\})=v(\{3,4\})=0$, ценность других коалиций из 2-х игроков равна 1.

a) Найти ядро.

b) Что произойдет с ядром, если ценность коалиции {1, 3, 4} возрастет с 1 до 2?

c) Прокомментируйте то, что происходит с выигрышами 1-го, 3-го и 4-го игроков?

85. «Мусор»

Имеется n игроков. Каждый из игроков обладает мешком мусора и собственным домом. Игра состоит в том, чтобы забросить свой мешок с мусором в чей-либо двор. Выигрыш игрока – это количество мешков в его дворе со знаком минус. В этой игре для коалиции из всех игроков выполнено $v(I)=-n$, т.е. ее выигрыш равен общему числу мешков с мусором со знаком минус.

Для коалиции S из k игроков при $k < n$ выигрыш равен $v(S)=k-n$, поскольку коалиция S может перебросить свой мусор тем игрокам, которые в нее не входят; таких игроков $n-k$, и эти игроки могут отплатить коалиции S тем, что сбросят свои $n-k$ мешков с мусором во дворы ее членов.

a) Найти ядро в игре «Мусор» для $n=2$.

b) Найти ядро в игре «Мусор» для $n=3$.

c) Найти ядро в игре «Мусор» для $n>3$.

86. «Наследство»

Миллиардер имеет трех племянников. Он завещает свое наследство целиком тому из трех племянников, кого они назовут большинством голосов.

Логично предположить, что в этой игре возможен сговор. Например, двое из племянников могут договориться голосовать за одного из них с тем, чтобы наследник перечислил половину наследства своему партнеру. Но третий, оставшийся в стороне, возможно, не позволит столь просто это сделать и попытается переманить одного из сообщников, обещая ему большую часть наследства.

Поэтому, если $I=\{1,2,3\}$ – множество наследников, а f – величина наследства, то характеристическая функция v задаётся равенствами:

$$v(I)=v(\{1,2\})=v(\{2,3\})=v(\{1,3\})=f\,;\; v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0\,.$$

Показать, что ядро игры пусто и пояснить этот результат на содержательном уровне.

87. «Джаз-оркестр»

Владелец ночного клуба в Париже обещает 1000 долларов певцу (S), пианисту (P) и ударнику (D) за совместную игру в его клубе.

Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в 800 долларов, ударника и пианиста – в 650 долларов и одного пианиста – в 300 долларов. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие фортепиано владелец клуба считает обязательным. Дуэт певец – ударник зарабатывает 500 долларов за вечер в одной удобно расположенной станции метро, певец зарабатывает в среднем 200 долларов за вечер в открытом кафе. Ударник в одиночку ничего не может заработать.

a) Представить игру «Джаз-оркестр», как игру в характеристической.

b) Найти множество Парето-оптимальных дележей.

c) Найти ядро.

Вариант контрольной работы №1

<u>темы</u>: 1. *Решение игры в чистых стратегиях.*
2. *Решение игры* 2×2 *в смешанных стратегиях.*
3. *Решение (графическое) игр* $n\times 2$ *и* $2\times m$ *в смешанных стратегиях.*
4. *Приближённое решение матричной игры.*

1. Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ A_3 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ A_4 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{array}$

a) Определить нижнюю и верхнюю цену игры, а так же максиминные и минимаксные стратегии игроков A и B соответственно.

b) Изменить только один элемент матрицы α (указать какой именно) так, чтобы после изменения игра имела решение в чистых стратегиях. Найти это решение (оптимальные стратегии и цену игры).

c) Объяснить, почему игрокам A и B не выгодно отклоняться от своих оптимальных стратегий (имеется в виду игра, соответствующая матрице, найденной в задании (b)).

2. Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 2 & -1 \\ A_2 & -2 & 3 \end{array}$

a) Показать, что игра не имеет решения в чистых стратегиях.

b) Решить игру в смешанных стратегиях (найти цену игры – v и оптимальные стратегии – (P^0, Q^0)) аналитическим и графическим методами.

3. Пусть матрица игры имеет вид: $\alpha = \begin{array}{c|ccc} & B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline A_1 & 0 & -2 & 1 \\ A_2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$

a) Найти решение игры (цену игры – v и оптимальные стратегии – (P^0, Q^0)) графическим методом.

b) Доказать (аналитически, используя свойства оптимальных стратегий), что стратегии (P^0, Q^0), найденные в задании (a) являются оптимальными.

4. Для матрицы игры α из задания 3

a) найти приближённое решение игры, используя 5 итераций;

b) определить точность полученного решения, т.е. разницу между верхней и нижней ценой игры $\overline{v} - \underline{v}$ в приближённом решении.

Вариант контрольной работы №2

(тема: Игры с природой)

При игре с природой задана некоторая платежная матрица *A*.

1. Определить матрицу рисков R и оптимальные стратегии первого игрока при использовании им:

   a) критерия максимакса;

   b) критерия Вальда;

   c) критерия Сэвиджа;

   d) критерия Гурвица с коэффициентом пессимизма *p*.

Какой вывод можно сделать из полученных результатов?

2. Определить оптимальную стратегию при известном векторе вероятностей состояний природы $\boldsymbol{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Вариант контрольной работы №3

(тема: Биматричные игры)

Пусть биматричная игра задана платежными матрицами игроков *A* и *B*:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Для платёжных матриц *A* и *B* выписать систему из четырёх неравенств (в общем виде и для конкретных матриц), определяющую равновесные ситуации биматричной игры.
2. На графике (в системе координат *Opq*) изобразить две кривые, первая из которых соответствует системе первых двух неравенств, а вторая кривая – последним двум неравенствам из задания 1
3. Используя графики из задания 2, найти все равновесные ситуации игры (если они есть) и величину выигрыша для каждого игрока в каждой из найденных ситуаций.
4. На примере одной из равновесных ситуаций, найденных в задании 3 показать, что для игрока *A* отклонение от состояния равновесия не может увеличить его выигрыш при условии, что игрок *B* сохраняет своё равновесие.
5. Для платёжных матриц *A* и *B*

a) найти все ситуации оптимальные по Парето (в классе чистых стратегий);

b) определить есть ли ситуации:

оптимальные по Парето, но неравновесные по Нэшу;

равновесные по Нэшу, но неоптимальные по Парето;

равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето?

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации

4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПК-10	владение навыками количественного и качественного анализа информации при принятии управленческих решений, построения экономических, финансовых и организационно-управленческих моделей путем их адаптации к конкретным задачам управления	ПК-10.1	Построение теоретико-игровых моделей и нахождение в каждой из них равновесных (оптимальных) стратегий

4.3.2 Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПК-10.1 Построение теоретико-игровых моделей и нахождение в каждой из них равновесных (оптимальных) стратегий.	Способность формализовать антагонистический конфликт и владеть методами его разрешения.	Умение правильно применять методы разрешения конфликтных ситуаций в антагонистических играх в общем случае и в конкретных экономических и управленческих конфликтах.
	Освоение методов нахождения оптимального решения в «играх с природой».	Умение в «играх с природой» применять различные критерии для нахождения оптимальных стратегий.
	Способность решать неантагонистические конфликты (биматричные игры).	Умение решать биматричные игры для квадратных матриц размерности 2 графическим способом.
	Освоение методов решения позиционных и кооперативных игр	Умение нормализовать позиционные игры и решать проблему дележа в кооперативных играх (вектор Шепли).

4.3.3 Типовые контрольные задания или иные материалы (типовые оценочные материалы), необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта

деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Зачетное задание включает задачи по всем темам, изученным по дисциплине. Примеры задач приведены в разделе 4.2 данной программы.

Шкала оценивания

Итоговая оценка складывается из суммы баллов за выполнение трех контрольных работ (максимум 60 баллов) и выполнения зачетной работы (максимум 40 баллов).
В зачетной работе 5 задач, решение каждой оценивается максимум в 8 баллов.

Перевод баллов в традиционную систему оценки:

Баллы по 100-балльной системе	Пятибалльная система оценки	Система оценивания «зачтено-не зачтено»
85-100 баллов	отлично	Зачтено
70-84 баллов	хорошо	зачтено
55-69 баллов	удовлетворительно	зачтено
Менее 55 баллов	неудовлетворительно	Не зачтено

4.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

5.Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методические рекомендации для подготовки к работе на лекциях

При подготовке к предстоящей лекции студенту необходимо в первую очередь освежить в памяти материал предыдущей лекции. Для этого можно использовать конспект (предполагается, что студент конспектирует содержание лекций) и соответствующий раздел или разделы рекомендуемой литературы.

Иногда на лекции преподаватель формулирует интересные (не простые) задачи для самостоятельного решения. Желательно при подготовке к следующей лекции постараться решить или хотя бы вникнуть в содержание этих задач.

Обычно лекция заканчивается перечнем вопросов или тем, которые планируется рассмотреть на следующей лекции. Было бы хорошо (но, к сожалению не всем студентам это по силам) самостоятельно, использую литературу, хотя бы в обзорном порядке, ознакомиться с содержанием тем предстоящей лекции.

Методические рекомендации для подготовки к семинарам

Семинарские занятия по математике – это почти всегда решение задач.

Поэтому первое, что необходимо сделать студенту для подготовки к семинару – это решить (или хотя бы постараться решить) задачи, заданные на дом. Решение конкретных задач неразрывно связано с освоением теоретического материала и разбором соответствующих примеров, рассмотренных на лекциях и в учебниках. Часто на этом пути у студентов возникают вопросы.

При подготовке к семинару студенту необходимо подготовить перечень вопросов, которые он хотел бы задать преподавателю. При этом вопросы условно делятся на две категории: вопросы, относящиеся к теоретическому материалу и вопросы по решению домашних задач. Желательно, чтобы эти вопросы носили конкретный характер, т.е. студент должен корректно сформулировать, что ему неясно в том или ином разделе теории или какие трудности возникли при решении определённой задачи.

Методические рекомендации по подготовке и выполнению контрольных работ

Письменные контрольные работы – основная форма текущего контроля знаний по данной дисциплине. Именно по результатам контрольных работ определяются баллы каждого студента за работу в семестре.

Контрольные работы не переписываются, а студент, пропустивший контрольную работу без уважительной причины, получает за неё 0 баллов.

Обычно преподаватель заранее называет темы, которые войдут в ближайшую контрольную работу. И после этого все семинарские занятия предшествующие этой контрольной работе являются, по сути, неявной подготовкой к ней. Здесь подойдут все рекомендации предыдущего раздела, относящегося к подготовке к семинарам, за исключением задач на доказательство, которых нет в контрольных работах.

На семинаре, предшествующем контрольной или чуть ранее, студентам раздаются пробные варианты (обычно два: «Вариант *X*» и «Вариант *Y*»). Студенту необходимо составить подробное решение этих вариантов и обсудить его с преподавателем, обычно это происходит на последнем семинаре перед контрольной работой. Каждая задача пробного варианта соответствует отдельной теме, поэтому, если при решении одной из таких задач у студента возникают трудности, то ему необходимо самостоятельно решить ещё несколько задач на соответствующую тему, используя рекомендованную литературу.

Методические рекомендации по подготовке к зачету

Зачёт проводятся в письменной форме.

Примерно за две недели до зачёта, а иногда, если это необходимо и раньше, студентам раздаётся программа зачёта. В программе перечислены все темы, вынесенные на зачёт, и приведено подробное содержание этих тем. Основная часть программы – это образцы зачётных заданий, примерно по десять образцов на каждое задание.

Для подготовки к зачёту студент должен самостоятельно выполнить все задания программы, а затем постараться активно участвовать в их обсуждении на семинарах. Кроме этого, необходимо разобрать вопросы для самоподготовки по каждой из тем зачёта из 6-го раздела данной программы. Хорошим дополнением ко всему проделанному было бы решение соответствующих задач из рекомендованной литературы.

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1 Основная литература

1. Колобашкина Л.В. Основы теории игр. – М.: БИНОМ, 2014
2. Челноков, А. Ю. Теория игр : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Ю. Челноков. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 223 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-5830-0. Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/92E22487-3EB2-43C0-9624-D2728954E3F5

6.2 Дополнительная литература

1. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. – М.: Либриком, 2014

6.3 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Раздаточный материал, подготовленный преподавателем

6.4 Нормативные правовые документы – не используются

6.5 Интернет-ресурсы не используются

6.6 Иные источники

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: КНОРУС, 2010
2. Демешев Б., Кооперативные игры. – М.: ВШЭ, 2011
3. Оуэн Г. Теория игр. Математическое введение. – М.: ЛКИ, 2010
4. Петросян Л.А., Занкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. – М.: BHV, 2012
5. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985
6. Колесник Г.В. Теория игр. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010

7. Материально-техническая база, информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Аудитория для лекционных занятий 338/5.
Аудитории для практических занятий – 224/5, 236/2