Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

Институт бизнеса и делового администрирования

Факультет международного бизнеса и делового администрирования

УТВЕРЖДЕНА
решением Ученого совета ИБДА
Протокол от «13» сентября 2018 г.
№ 4

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.Б.12 Математика

38.03.02 Менеджмент

Международный менеджмент

Бакалавр

Очная форма обучения

Год набора – 2019

Москва, 2018

Автор(ы)–составитель(и):
к.ф-м.н., доцент, доцент кафедры количественных методов в менеджменте ИБДА
Миронов Владимир Львович

Заведующий кафедрой количественных методов в менеджменте ИБДА
д.э.н., профессор А.Н. Чеканский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

1.1. Дисциплина **Б1.Б.12 Математика** обеспечивает овладение следующими компетенциями с учетом этапа:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
УК ОС-9	Способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	УК ОС-9.1	Способность использовать экономические знания для понимания и оценки процессов в экономической сфере жизни общества на различных уровнях; применять математический инструментарий для решения экономических задач (методы и результаты матричной алгебры, аналитической геометрии и теории векторных пространств)
		УК ОС-9.2	способность оценивать различные аспекты социально-экономической политики государства, делать прогнозы относительно дальнейшего функционирования экономической системы; применять математический инструментарий для решения экономических задач (методы и результаты теории функций действительных переменных и дифференциальных уравнений)

В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
УК ОС-9.1 УК ОС-9.2	**Знать**: основы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа;
	Уметь: самостоятельно разбираться в вопросах приложения математических методов к различным областям знаний;
	Владеть навыками: решения стандартных математических задач из основных разделов математики;

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся и место дисциплины в структуре образовательной программы.

Объем дисциплины

Учебным планом для дисциплины **Математика** установлено:

- трудоемкость дисциплины– 6 з.е.,
- контактная работа с преподавателем – 116 часа, в том числе 52 часа – лекции, 60 часjd – практические занятия, 4 часа - консультации;
- самостоятельная работа – 64 часа.

Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина **Математика** изучается в течение 1-2 семестров.
Форма промежуточной аттестации – зачет (1 семестр), экзамен (2 семестр).

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических или астрономических часов и видов учебных занятий и структура дисциплины

(очная форма обучения)

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
			Л	**ЛР**	**ПЗ**	**КСР**		
Раздел 1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия (1 семестр)								
Тема 1	Матрицы, системы линейных уравнений, определители	38	10		12		16	О, КР
Тема 2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	36	10		10		16	О, КР
Тема 3	n-мерные векторные пространства	34	8		10		16	О, КР
Промежуточная аттестация		108	28		32		48	**зачет**
Раздел 2. Математический анализ (2 семестр)								
Тема 4	Функциональная зависимость и предел функции, непрерывность функции	8	4		4		2	О, КР
Тема 5	Производная и дифференциал функции, приложения производной к исследованию функций	14	4		6		4	О, КР
Тема 6	Интегральное исчисление: неопределённый, определённый и несобственный интегралы	12	4		4		4	О, КР
Тема 7	Функции нескольких переменных: предел, непрерывность, производные, экстремумы функции 2-х переменных	12	4		4		4	О, КР

№ п/п	Наименование тем и/или разделов	Объем дисциплины (модуля), час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
			Л	**ЛР**	**ПЗ**	**КСР**		
Тема 8	Комплексные числа	10	4		4		2	О, КР
Тема 9	Дифференциальные уравнения	14	4		6		4	О, КР
Промежуточная аттестация		108	24		28		20	**Экзамен 36**
Всего по дисциплине		**216**	**52**		**60**		**68**	36

Содержание дисциплины

Раздел 1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема 1. Матрицы, системы линейных уравнений, определители

Понятие матрицы, операций над матрицами, обратная матрица, Алгоритм Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду и нахождения обратной матрицы. Понятия: системы линейных уравнений, решения системы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерии совместности и определённости систем линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений. Понятия определителей: 2-го, 3-го и n-го порядков. Свойства определителей. Методы вычисления определителей. Нахождения обратной матрицы с помощью определителей. Правило Крамера.

Понятия: модели Леонтьева межотраслевого баланса, матрицы прямых затрат, вектора валового продукта, вектора конечного продукта. Формулировка задачи о продуктивности модели Леонтьева, критерии продуктивности матрицы прямых затрат.

Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Понятие вектора на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами, свойства этих операций. Понятие базиса и координат вектора. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Скалярное произведений векторов, свойства скалярного произведения. Векторное произведение. Уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве. Задачи нахождения: угла между прямыми, угла между плоскостями, расстояния от точки до прямой, расстояния от точки до плоскости. Элементы теории кривых второго порядка.

Тема 3. n-мерные векторные пространства

Понятие n-мерного векторного пространства. Понятие базиса и ранга множества векторов n-мерного векторного пространства. Понятие подпространства и размерности подпространства. Метод построения фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.

Евклидовы векторные пространства, нахождения ортонормированного базиса. Метод наименьших квадратов. Аппроксимация экспериментальных данных прямыми.

Нахождение собственных векторов и собственных значений матрицы, приведение матрицы к диагональному виду.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 4. Функциональная зависимость и предел функции, непрерывность функции

Элементарные функции, графики элементарных функций. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, теоремы о бесконечно малых. Понятие предела функции, теоремы о пределах. Число Эйлера, приложения числа Эйлера к вычислению пределов. Понятие непрерывности функции в точке и на отрезке. Теоремы о непрерывных функциях.

Классификация точек разрыва. Свойства функций непрерывных на отрезке: теорема Вейерштрасса и теорема Коши.

Тема 5. Производная и дифференциал функции, приложения производной к исследованию функций

Понятие производной функции в точке. Геометрический смысл производной, уравнение касательной. Основные формулы и правила вычисления производной. Правило Лопиталя. Понятие дифференциала функции, линеаризация функции. Применения дифференциала к приближённым вычислениям. Исследование функции на монотонность и наличие точек экстремума. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Общая схема исследования функции и построения графиков, примеры.

Тема 6. Интегральное исчисление: неопределённый, определённый и несобственный интегралы

Понятие первообразной и неопределённого интеграла, свойства неопределённого интеграла. Табличные интегралы. Основные правила интегрирования: замена переменной, внесение под знак дифференциала, интегрирование по частям. Приёмы интегрирования для некоторых классов функций: рациональных дробей, функций с радикалами, тригонометрических функций. Примеры функций, не интегрируемых в элементарных функциях. Понятие определённого интеграла, свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница, приёмы вычисления определённых интегралов. Приложения определённого интеграла к вычислению площадей и объёмов. Понятие несобственного интеграла 1-го и 2-го рода. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Тема 7. Функции нескольких переменных: предел, непрерывность, производные, экстремумы функции 2-х переменных

Понятие функции n-переменных. Предел и непрерывность функции 2-х переменных. Частные производные и дифференциал для функции 2-х переменных, производная по направлению, градиент. Понятие экстремума для функции 2-х переменных, достаточное условие экстремума. Понятие условного экстремума, метод множителей Лагранжа для нахождения условного экстремума. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции 2-х переменных в замкнутой и ограниченной области.

Тема 8. Комплексные числа

Понятие множества комплексных чисел, алгебраические операции над комплексными числами. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Формула Муавра и формула извлечения корня n-ой степени из комплексного числа. Показательная форма комплексного числа, формула Эйлера для мнимой экспоненты.

Тема 9. Дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения n-го порядка. Задача Коши, теорема существования и единственности. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Линейные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации

4.1.1. В ходе реализации дисциплины **Б1.Б.11 Математика** используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема	Методы текущего контроля успеваемости
Раздел 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	
Тема 1. Матрицы, системы линейных уравнений, определители	Опрос, Контрольная работа
Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	Опрос, Контрольная работа
Тема 3. n-мерные векторные пространства	Опрос, Контрольная работа
Раздел 2. Математический анализ	
Тема 4. Функциональная зависимость и предел функции, непрерывность функции	Опрос, Контрольная работа
Тема 5. Производная и дифференциал функции, приложения производной к исследованию функций	Опрос, Контрольная работа
Тема 6. Интегральное исчисление: неопределённый, определённый и несобственный интегралы	Опрос, Контрольная работа
Тема 7. Функции нескольких переменных: предел, непрерывность, производные, экстремумы функции 2-х переменных	Опрос, Контрольная работа
Тема 8. Комплексные числа	Опрос, Контрольная работа
Тема 9. Дифференциальные уравнения	Опрос, Контрольная работа

4.1.2. Зачеты и экзамен проводятся в письменной форме.

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся

Вопросы для самоподготовки и проведения опросов на занятиях

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1. Матрицы, системы линейных уравнений, определители

1. Объяснить, как определяются операции над матрицами: сложение, умножение, умножение на число. Сформулировать свойства этих операций, на примерах проверить справедливость некоторых свойств. Доказать, что если для матриц A и B выполняется равенство AB = BA , то A и B квадратные матрицы одинакового порядка.

2. Объяснить, какие матрицы называют ступенчатыми, главными ступенчатыми. Привести примеры ступенчатых матриц. Изложить алгоритм Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк.

Привести матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ к главному ступенчатому виду.

3. Объяснить, какие матрицы называются обратимыми, привести примеры обратимых и необратимых матриц. Изложить алгоритм Гаусса нахождения обратной матрицы. Показать, как с помощью алгоритма Гаусса определить, обратима ли матрица.

Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Объяснить, что понимается под системой линейных уравнений, решением системы, матричной записью системы. Привести примеры: совместной, несовместной, определённой и неопределённой систем линейных уравнений. На примере показать, что при элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы получается система равносильная исходной системе.

Определить, равносильны ли системы: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 15x_1 + 20x_2 + 5x_3 + 15x_4 = 20 \end{cases}$?

5. Изложить алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений. Применить этот алгоритм к решению системы $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$. Объяснить, как с помощью алгоритма Гаусса определить, совместна ли система линейных уравнений и является ли она определённой.

6. Объяснить, какие системы линейных уравнений называются однородными. Показать, как с помощью алгоритма Гаусса распознать: имеет ли однородная система линейных уравнений нетривиальное решение. Сформулировать достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы линейных уравнений, показать на примере, что это условие не является необходимым.

Решить однородную систему $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$, а затем найти общее решение системы $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$, если известно её частное решение $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

7. Объяснить, что понимается под определителем матрицы. Сформулировать свойства определителей. На примере показать, что определитель с двумя равными строками равен нулю (рассмотреть определитель 3-го порядка). Показать, как вычисляется определитель верхнетреугольной матрицы. Изложить метод вычисления определителя приведением его к треугольному виду. Применить этот метод к вычислению определителя матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы. Применить эту формулу к решению матричного уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Сформулировать условие обратимости матрицы на языке определителей. Используя это условие, найти все значения k, при которых матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & k \end{pmatrix}$ является обратимой.

9. Сформулировать правило Крамера. Применить правило Крамера для решения системы $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$, сделать проверку. Сформулировать условие (на языке определителей), при котором система n - линейных уравнений с n - неизвестными имеет единственное решение. Используя это условие, найти все значения k, при которых система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + kx_2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

10. Объяснить, что понимается под моделью Леонтьева межотраслевого баланса и в чём суть принципа линейности материальных затрат. Сформулировать критерий продуктивности для матрицы прямых затрат.
В следующей таблице приведены данные об исполнении баланса за отчётный период в условных денежных единицах:

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
	1 отрасль	2 отрасль		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объём валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться на 25%, а второй отрасли – в 1,5 раза.

Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Объяснить, что понимается под вектором на плоскости и в пространстве. Определить операции сложения векторов и умножения вектора на число. Сформулировать свойства этих операций. Показать на примере, что сложение векторов ассоциативно.
Зная векторы, служащие сторонами треугольника: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{c}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, найти векторы, соответственно коллинеарные биссектрисам углов этого треугольника.

2. Определить понятия линейной зависимости и линейной независимости системы векторов. Показать, что любые три вектора на плоскости линейно зависимы. Ввести понятие базиса и сформулировать теорему об описании базисов на плоскости и в пространстве. Объяснить, что такое ортонормированный базис и координаты вектора в данном базисе. Определить прямоугольную декартову систему координат на плоскости и в пространстве.
Определить, при каких значениях p и q система из двух векторов $\overline{a}$ = (-2,3,p) и $\overline{b}$ = (q,-6,2) линейно зависима.

3. Дать определение скалярного произведения векторов. Сформулировать свойства скалярного произведения. Выписать формулу для выражения скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов. Объяснить, как находить длину вектора и косинус угла между векторами через скалярное произведение.
Найти координаты вектора $\overline{x}$ коллинеарного вектору $\overline{a}$ = (2,1,-1) и удовлетворяющего условию ($\overline{x}$, $\overline{a}$) = 3.

4. Объяснить, как составить уравнение прямой, если известна точка на прямой и вектор ортогональный прямой (общее уравнение прямой). Привести соответствующий пример. Выписать формулу для нахождения расстояния от точки до прямой.
Найти расстояние от точки A(21,32) до прямой m: 2x + 3y – 8 = 0, а также точку, симметричную точке A(21,32) относительно этой прямой.

5. Объяснить, как составить уравнение прямой в случае, если известна точка на прямой и вектор, параллельный данной прямой (каноническое уравнение прямой), а также в случае, если известна точка на прямой и угловой коэффициент прямой (уравнение прямой с угловым коэффициентом). Привести соответствующие примеры.
Даны точки A(-6,5), B(2,-3) и C(0,-5). Составить уравнение средней линии треугольника ABC параллельной стороне BC.

6. Объяснить, как составить уравнение плоскости в случае, если известна точка на плоскости и вектор, ортогональный к плоскости (общее уравнение плоскости), а также в случае, если известны три точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Привести соответствующие примеры.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3,-1,2)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$, где M_2 (4,-2,-1).

7. Даны прямые в пространстве: $m: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$ и $l: \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$: **a)** определить, лежат ли прямые m и l в одной плоскости; **b)** определить угол между прямыми m и l; **c)** составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,1)$ параллельно прямым m и l.

8. Даны: прямая в пространстве, заданная системой $l: \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$ и точка $M(1,0,1)$:

a) составить уравнение прямой l в каноническом виде;

b) составить уравнение плоскости перпендикулярной прямой l и проходящей через точку $M(1,0,1)$;

c) найти расстояние от точки $M(1,0,1)$ до прямой l.

9. Пусть кривая γ задана уравнением: $4x^2+6y^2-4x+12y-5=0$ $(*)$.
a). Привести уравнение $(*)$ к каноническому виду и выписать необходимые преобразования координат, т.е. выражения x' и y' через x и y соответственно и координаты точки O'. **b).** Классифицировать кривую γ в соответствии с каноническим уравнением, полученным в п. (a).
c). Изобразить на одном чертеже: исходную (старую) систему координат Oxy; новую систему координат $O'x'y'$, в которой кривая γ имеет каноническое уравнение (указав координаты точки O'); кривую γ.

Тема 3. n-мерные векторные пространства

1. Дать определение **n** – мерного векторного пространства $\mathbf{R^n}$. Объяснить, что понимается под базисом множества **M** векторов из $\mathbf{R^n}$. Изложить алгоритм нахождения базиса для конечного множества **n** – мерных векторов.
Найти базис системы векторов: $\overline{v}_1 = (1,1,3,-1)$ $\overline{v}_2 = (0,2,4,-4)$ $\overline{v}_3 = (1,3,7,-5)$ $\overline{v}_4 = (0,-1,-1,3)$ и выразить все векторы через базисные.

2. Дать определение евклидова пространства. Объяснить, что такое длина вектора и угол между векторами в евклидовом пространстве. На примере показать, как найти длину вектора и угол между векторами в пространстве $\mathbf{R^4}$. Изложить алгоритм нахождения ортонормированного базиса пространства, порождённого конечным числом векторов.
Найти ортонормированный базис пространства $\mathbf{L} = <\overline{v}_1\ \overline{v}_2\ \overline{v}_3>$, где $\overline{v}_1 = (1,2,2,-1)$ $\overline{v}_2 = (1,1,-5,3)$ $\overline{v}_3 = (3,2,8,-7)$.

3. Объяснить, как найти приближённое решение несовместной системы линейных уравнений методом наименьших квадратов. Изложить геометрическую интерпретацию этого метода. Показать, как найти ошибку полученного приближённого решения (квадратическое отклонение δ^2).
Методом наименьших квадратов найти приближённое решение несовместной системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1+x_2 = 2 \\ x_1+x_2 = 1 \\ x_1+3x_2 = 0 \end{cases}$ и определить ошибку полученного решения.

4. Объяснить, как с помощью метода наименьших квадратов аппроксимировать экспериментальные данные различными кривыми.
Выписать формулы, позволяющие аппроксимировать экспериментальные данные функцией вида **y = ax + b**. Показать, как найти ошибку, полученной аппроксимации. Определить, какая из двух функций **y = ax + b** или $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ лучше аппроксимирует следующие экспериментальные данные:

x	0	1	2	3

y	0	1	1	1

5. Дать определение собственного вектора и собственного значения матрицы. Изложить алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы. Сформулировать критерий подобия матрицы диагональной. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и выяснить, подобна ли матрица A диагональной.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 4. Функциональная зависимость и предел функции, непрерывность функции

1. Найти область определения функции: $y = \arcsin\,(2x^2 + x)$.

2. Найти область определения функции: $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

3. Найти область определения и область значений функции: $y = \lg\,(1 - 2\cos x)$.

4. Найти область определения функции: $y = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$.

5. Для функции $y = \frac{1-x}{1+x}$ найти обратную функцию $x = f^{-1}(y)$ и указать её область определения ($D(f^{-1})$).

6. Для функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, где $-1 \le x \le 0$, найти обратную функцию $x = f^{-1}(y)$ и указать её область определения ($D(f^{-1})$).

7. Найти $f(x)$, если $f(\frac{x}{1+x}) = x^2$.

8. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ на чётность.

9. Исследовать функцию $y = \ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ на чётность.

10. Изобразить эскизы графиков следующих функций:

a) $y = \sqrt[5]{x+1} - 2$; **b)** $y = \ln x^4 + 2$; **c)** $y = \left| \frac{1 - 2|x|}{|x| - 1} \right|$; **d)** $y = \arccos\,(x+1)$; **e)** $y = \frac{x-3}{x^2 - 1}$;

f) $y = e^{\frac{1}{x}}$; **g)** $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; **h)** $y = \sin\,(\arcsin x)$; **i)** $y = \arcsin(\sin x)$; **j)** $y = \operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{x})$;

k) $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

11. Объяснить на примерах, какие функции называются бесконечно малым. Указать, в каком случае основные элементарные функции: x^{α}, a^x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ являются бесконечно малыми. Составить шкалу сравнений для функций x^{α}, a^x, e^x, $\ln x$ с использованием символа «о малое».

12. Привести пример (графический) функции $f(x)$, которая является бесконечно малой при $x \to 1$ и при $x \to 2$, при этом $f(1) = 1$ и $f(2) = 2$.

13. Может ли отношение двух бесконечно малых функций (в одной и той же точке) быть бесконечно большой функцией (в той же точке)? Ответ пояснить.

14. Может ли отношение двух бесконечно больших функций (при $x \to +\infty$) быть бесконечно малой функцией (при $x \to +\infty$)? Ответ пояснить.

15. Привести пример (графический) функции $f(x)$, которая одновременно является бесконечно малой при $x\to 0$ и бесконечно большой при $x\to -\infty$, при этом $f(0)=-1$.

16. Привести пример (графический) функции $f(x)$, которая одновременно является бесконечно малой при $x\to -\infty$ и бесконечно большой при $x\to -1$, при этом $f(-1)=0$.

17. Указать, в каких случаях функция $f(x)=\ln(x+1)-2$ является бесконечно малой, а в каких случаях бесконечно большой.

18. Указать, в каких случаях функция $f(x)=\dfrac{1-x}{2x}$ является бесконечно малой, а в каких случаях бесконечно большой.

19. Указать, в каких случаях функция $f(x)=e^{2-x}-1$ является бесконечно малой, а в каких случаях бесконечно большой.

20. Дать определение того, что b является пределом функции $\mathrm{f(x)}$ при $\mathrm{x}\to\mathrm{a}$, где a и b числа или $\pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Доказать, пользуясь определением предела, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x-2x^2}{x^2}=-2$.

21. Привести пример (графический) функции $f(x)$, для которой одновременно выполняются следующие пять соотношений: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=-\infty$, $f(-1)=0$.

22. Привести пример функции бесконечно малой по сравнению с функцией $f(x)=\ln x^2$ при $x\to+\infty$.

23. Привести пример функции бесконечно малой по сравнению с функцией $f(x)=2x+1$ при $x\to 2$.

24. Привести пример функции $f(x)$, для которой справедливо следующее соотношение: $x^{100}+2^x=o(f(x))$ при $x\to+\infty$.

25. Привести пример двух различных функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что $f(x)=o(3^x+e^x)$ и $g(x)=o(3^x+e^x)$ при $x\to+\infty$.

26. Верно ли, что если $f(x)=o(x)$ и $g(x)=o(x)$ при $x\to+\infty$, то и $(f(x)+g(x))=o(x)$ при $x\to+\infty$. Ответ пояснить.

27. Выписать асимптотические формулы необходимые для вычисления следующего предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\cos x}{\sin x^2}$, а затем вычислить этот предел.

28. Выписать асимптотические формулы необходимые для вычисления следующего предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+\operatorname{arctg} x}{\sqrt[4]{1-x}-1}$, а затем вычислить этот предел.

29. Выписать асимптотические формулы необходимые для вычисления следующего предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\operatorname{tg} x}$, а затем вычислить этот предел.

30. Выписать второй замечательный предел, а затем вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{2x-3}$.

31. Определить понятие непрерывности функции в точке. Привести классификацию точек разрыва с соответствующими примерами. Исследовать характер точек разрыва функции $\mathrm{y}=\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x^2+x}$.

32. Определить характер точек разрыва функции $y=\dfrac{2x}{x^2-x}$.

33. Привести пример (графический) функции $f(x)$, для которой одновременно выполняются следующие условия: $f(x)$ определена на множестве $(-\infty,+\infty)$, в точке $x=1$ функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв, в точке $x=2$ функция $f(x)$ имеет разрыв типа «скачок», в точке $x=3$ функция $f(x)$ имеет разрыв 2-го рода.

34. Сформулировать свойства функции непрерывной на отрезке (теорему Вейерштрасса и теорему Коши). Показать, что все условия этих теорем существенны.

35. Верно ли, что функция $f(x)=\sin x-\dfrac{x}{2}$ имеет точку пересечения с осью Ox, принадлежащую отрезку $[\dfrac{\pi}{2},\ \pi]$? Ответ обосновать.

36. Верно ли, что функция $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{x^2-x}$ ограничена на отрезке $[3,\ 7]$? Ответ обосновать.

37. Верно ли, что функция $f(x)=\dfrac{x^4-4x+4}{x^2-x}$ ограничена на интервале $(1,\ 5)$? Ответ обосновать.

Тема 5. Производная и дифференциал функции, приложения производной к исследованию функций

1. Дать определение производной функции в точке. Объяснить геометрический смысл производной, записать общий вид уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Объяснить, как найти производную сложной функции, вычислить производную функции $y=\ln^3 \arcsin\sqrt{x^2-1}$.

2. Найти производные функций: $y=\ln^2 \ln 2\sqrt{x}$, $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+\ln(x-1)^2$, $y=\sqrt[4]{x}\,(e^{\frac{-x}{4}}+1)$,

$y=\ln^2(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1})$, $y=\dfrac{x^2+4^x}{e^x}+\arcsin\sqrt[4]{x^3}$, $y=\dfrac{x^2+2x}{e^{-2x}}$, $y=\ln^2(\sqrt{x^2-1})+\dfrac{e^x}{\cos^2 x}$.

3. Составить уравнение касательной к параболе $y=-3x^2+2x+1$ в точках её пересечения с осью ординат. Сделать чертёж.

4. Составить уравнения касательных к гиперболе $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ параллельных прямой $y=-3x$. Сделать чертёж.

5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{2x-5}$, проведённой перпендикулярно прямой, проходящей через точки A (1;1) и B(3;-1). Сделать чертёж.

6. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2-7x+6$, проведённой параллельно прямой, проходящей через начало координат под углом 45^0 с положительным направлением оси OX. Сделать чертёж.

7. Дать определение дифференциалом функции. Показать, как с помощью дифференциала получить приближённую формулу для оценки погрешности Δy, которая возникает при вычислении значения функции $y = f(x)$ в точке $x \pm \Delta x$. Вычислить с указанием погрешности значение функции $y = \frac{x^2}{x^2 - 3}$ при $x = 2 \pm 0{,}001$.

8. Найти дифференциал функций: $y = \sin^3 2x$; $y = \ln(\sin\sqrt{x})$; $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$.

9. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$.

10. Объяснить, какая функция называется монотонной на множестве. Привести пример функции возрастающей на множестве $[-\infty,\ 1]$ и убывающей на множестве $[1,\ +\infty$). Дать определение точки экстремума. Изложить схему исследования функции на монотонность и наличие точек экстремума. Применить эту схему к функции $y = \ln|x+5| + \ln|2x+3|$.

11. Описать алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной на отрезке. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ на отрезке [1, 3].

12. Объяснить, в каком случае кривая называется выпуклой (вогнутой) в некоторой точке. Привести пример функции, график которой является выпуклым в точке x_0=2. Изложить схему исследования функции на выпуклость (вогнутость) и наличие точек перегиба. Применить эту схему к функции $y = 2\ln|x| - \ln|x-1|$.

13. Дать определения: вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот. Привести соответствующие примеры. Исследовать на наличие наклонной асимптоты функцию $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

14. Изложить общую схему исследования функций и построения их графиков. Применить эту схему к функции $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

15. Исследовать функции и построить их графики: $y = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^3}$; $y = x^2 e^{-x}$; $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$; $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3}$; $y = \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Тема 6. Интегральное исчисление: неопределённый, определённый и несобственный интегралы

1. Дать определение первообразной для функции и неопределённого интеграла от функции. Привести соответствующие примеры. Сформулировать свойство линейности для неопределённого интеграла. Пользуясь свойством линейности и табличными интегралами вычислить интеграл $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$.

2. Вычислить неопределённый интеграл: $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx$. Результат интегрирования проверить дифференцированием.

3. Объяснить на конкретном примере правило замены переменной под знаком неопределённого интеграла. Используя это правило, вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

4. Вычислить неопределённый интеграл (можно использовать метод внесения под знак дифференциала): $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. Результат интегрирования проверить дифференцированием

5. Сформулировать правило интегрирования по частям. Используя это правило и правило замены переменной, вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}} x dx$.

6. Вычислить неопределённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x+1)e^{2x}\, dx$.

7. Вычислить интеграл методом неопределённых коэффициентов: $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx$.

8. Дать определение определённого интеграла от функции, заданной на отрезке. Сформулировать свойства линейности, аддитивности и интегрирования неравенств для определённого интеграла. Пользуясь определением вычислить определённый интеграл $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$, где r некоторое положительное действительное число.

9. Изложить основные способы вычисления определённого интеграла: формулу Ньютона-Лейбница и метод замены переменной под знаком определённого интеграла. Используя эти методы вычислить определённый интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

10. Вычислить определённый интеграл: $\int_1^2 \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx$.

11. Рассмотреть геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур и вычисление объёмов тел вращения. Вычислить объём тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями: $y = x - 2$, $y = 2 - x$, $y = \sqrt{x}$.

12. Объяснить на примерах, что понимается под несобственными интегралами 1-го и 2-го рода. Сформулировать признаки сходимости несобственных интегралов. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}$.

13. Исследовать сходимость несобственного интеграла: $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{1+x^2}$.

Тема 7. Функции нескольких переменных

1. Определить понятие функции n-переменных. Объяснить, что понимается под областью определения и линиями уровня функции нескольких переменных. Найти и изобразить область определения функция

$z = \ln\,(y + \frac{1}{x^2})$. Для функции $z = 2x^2 - 3y^2$ найти уравнение и изобразить линию уровня, проходящую через точку $A(-1,1)$.

2. Ввести понятия предела и непрерывности для функции нескольких переменных. Определить частные производные, сформулировать теорему Шварца о равенстве смешанных производных. Для функции $z = \ln\,(y + \frac{1}{x^2})$ проверить справедливость равенства $z''_{xy} = z''_{yx}$.

3. Определить производную по направлению и градиент, сформулировать свойства градиента. Для функции $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ найти производную в точке $M_0(1,1)$ по направлению вектора $\bar{a} = (3,4)$.

4. Для функции $z = \dfrac{x^2}{y}$: a) найти уравнение линии уровня, проходящей через точку $(1;2)$; b) найти градиент в точке $(1;2)$; c) в одной системе координат построить линию уровня и градиент, найденные в пп. a) и b).

5. Определить полный дифференциал функции двух переменных. Для функции $z = \ln(2y^2 - x^2 + xy)$ найти полный дифференциал

6. Объяснить, как составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением, разрешённым относительно *z*: $z = f(x,y)$ и уравнением общего вида: $F(x,y,z) = 0$. Выписать уравнение нормали к поверхности в заданной точке. Для функции $z = \ln(x^2 - 3y^3)$ найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной этой функцией, в точке $A(-1,0)$.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $-2y^2 + z^2 + xz + x^2 - 4y = 13$, в точке $B(3,1,2)$.

8. Определить понятие экстремума для функции нескольких переменных. Сформулировать необходимо условие экстремума (теорема Ферма), понятие стационарной точки. Сформулировать достаточное условие экстремума функции двух переменных. Найти экстремумы функции $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

9. Ввести понятие условного экстремума. Сформулировать необходимое условие условного экстремума (метод множителей Лагранжа). Найти условный экстремум функции $z = xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = 2$.

10. Объяснить, как находить наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой ограниченной области. Для функции $z = 2x + y - 2xy$ найти наибольшее и наименьшее значения в области *D*, ограниченной линиями: $y = x,\ y = 2,\ x = 0$.

Тема 8. Комплексные числа

1. Определить алгебраическую и тригонометрическую формы комплексного числа. Найти действительное число равное сумме: $\dfrac{(1-i)^8}{(1-i\sqrt{3})^{30}} + \dfrac{(1+i)^8}{(-1-i\sqrt{3})^{30}}$.

2. Изобразить на комплексной плоскости все точки *z*, удовлетворяющие соотношению: $\left|\dfrac{z}{z+2i-1}\right| \geq 1$.

3. Выписать формулу Муавра и формулу извлечения корня *n*-ой степени из комплексного числа, дать геометрическая интерпретация этих формул. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения корня $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}\cdot i}$ (корни представить в алгебраической форме).

4. Определить показательную форму комплексного числа, выписать формулу Эйлера для мнимой экспоненты. Записать число $z=\dfrac{3i-1}{1+2i}$ в показательной форме и найти z^{16}.

Тема 9. Дифференциальные уравнения

1. Объяснить, что понимается под дифференциальным уравнением 1-го и n-го порядков, привести соответствующие примеры. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и теорему существования и единственности. Изложить метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, применит этот метод к решению уравнения: $y'=\sqrt{\dfrac{y}{1-x^2}}$. Решить задачу о построении математической модели демографического процесса.

2. Изложить метод решения однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка и уравнений в полных дифференциалах. В качестве примеров решить уравнения: $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x}$ и $(3x^2+2y)\,dx+(2x-3)\,dy=0$.

3. Изложить метод решения линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка и уравнений Бернулли. В качестве примера решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-xy^2$.

4. Изложить метод решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В качестве примера решить уравнение: $y''+2y'+y=\cos x$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $e^{x+3y}\,dy=x\,dx$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'-2y=2x^4$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$-4x^3e^{-2y}\,dx+(2x^4e^{-2y}-9y^2)\,dy=0.$$

9. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''+y'+y=e^x$.

Вариант контрольной работы №1

Темы: 1. Системы линейных уравнений.
2. Определители.
3. Уравнения прямой и плоскости.

1. Дана однородная система линейных уравнений $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 27x_4 = 0 \end{cases}$:

a) найти ранг матрицы системы;

b) показать, что система имеет нетривиальное решение;

c) решить систему: выписать общее решение, найти нетривиальное частное решение и сделать для него проверку;

d) проверить, является ли набор значений неизвестных $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$ решением неоднородной системы $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + 8x_4 = -5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 27x_4 = 13 \end{cases}$, полученной из исходной однородной системы, и выписать общее решение этой неоднородной системы.

2. Дано матричное уравнение $Z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

a) вычислить определитель матрицы *B* методом разложения по 2-ому столбцу;

b) показать, что матрица *B* обратима и найти матрицу обратную к матрице *B* (B^{-1}), сделать проверку (т.е. показать, что $BB^{-1} = E$);

c) решить матричное уравнение.

3. Даны две точки плоскости: $A(1, -2),\ B(3, 0)$. Найти:

a) уравнение прямой *AB*;

b) расстояние от начала координат до прямой *AB*;

c) уравнение прямой, проходящей через начало координат, параллельно прямой *AB*.

c) уравнение плоскости, проходящей через точку $C(0, 3, 1)$, параллельно плоскости α .

Вариант контрольной работы №2

Темы: 1. Метод наименьших квадратов.
2. Кривые 2-го порядка.

1. a). Аппроксимировать прямой следующие экспериментальные данные:

x	–1	0	2
y	–1	0	1

b). Составить уравнение прямой, проходящей через первые две экспериментальные точки (см. п. (a)): $(-1,\ -1)$ и $(0,\ 0)$.

c). Показать, что прямая, найденная в п. (b), не ближе к экспериментальным точкам, чем прямая, найденная в п. (a).

d). Изобразить в одной системе координат экспериментальные точки и прямые, найденные в пп. (a) и (b).

2. Кривая γ задана уравнением: $9x^2+27y^2-6x+36y-14=0$ $(*)$.

a). Привести уравнение $(*)$ к каноническому виду и выписать необходимые преобразования координат, т.е. выражения x' и y' через *x* и *y* соответственно и координаты точки O'.

b). Классифицировать кривую γ в соответствии с каноническим уравнением, полученным в п. (a).

c). Изобразить на одном чертеже:

- исходную (старую) систему координат *Oxy*;
- новую систему координат $O'x'y'$, в которой кривая γ имеет каноническое уравнение (указав координаты точки O');
- кривую γ.

Вариант контрольной работы №3

Темы: 1. Понятие элементарной функции, графики элементарных функций.
2. Простейшие свойства функций: область определения, область значений, чётность.
3. Обратные функции.

1. Изобразить эскиз графика функции $y=e^{|x|-3}+1$.

2. Найти область определения функции: $y=\lg(25-x^2)+\sqrt{2-3x}$.

3. Найти область значений функции: $y=\sqrt{-x^2-2x+3}$.

4. Исследовать функцию $y=x^2-\cos x$ на чётность.

5. Для функции $y=\arccos x$ найти обратную функцию $x=f^{-1}(y)$ и указать её область определения ($D(f^{-1})$) и область значений ($E(f^{-1})$).

Вариант контрольной работы №4

Исследовать функцию и построить её график: $y=\dfrac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$.

Вариант контрольной работы №5

Тема: интегралы

1. Вычислить неопределённый интеграл: $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt[5]{x^3}-7x^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

Результат интегрирования проверить дифференцированием.

2. Вычислить неопределённый интеграл (можно использовать метод внесения под знак дифференциала): $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Результат интегрирования проверить дифференцированием.

3. Вычислить неопределённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x-2)e^x\,dx$.
4. Вычислить интеграл методом неопределённых коэффициентов: $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.
5. Вычислить определённый интеграл: $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-2x+3}\,dx$.

Вариант контрольной работы №6

Тема: функции нескольких переменных

1. Изобразить на плоскости Oxy (штриховкой) область определения функции: $z = \arcsin(2x-y)$.
2. Для функции $z = \frac{x^2+1}{y^2}$:
   a) найти уравнение линии уровня, проходящей через точку $(-1;1)$;
   b) найти градиент в точке $(-1;1)$;
   c) в одной системе координат построить линию уровня и градиент, найденные в пп. a) и b).
3. Найти полный дифференциал функции: $z = \cos(3x+y) - x^2$.
4. Для функции $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$ проверить справедливо ли равенство: $z''_{xy} = z''_{yx}$.
5. Исследовать на экстремумы функцию: $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации

4.3.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
УК ОС-9	Способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности	УК ОС-9.1	Способность использовать экономические знания для понимания и оценки процессов в экономической сфере жизни общества на различных уровнях; применять математический инструментарий для решения экономических задач (методы и результаты матричной алгебры, аналитической геометрии и теории векторных пространств)
		УК ОС-2	способность оценивать различные

			аспекты социально-экономической политики государства, делать прогнозы относительно дальнейшего функционирования экономической системы; применять математический инструментарий для решения экономических задач (методы и результаты теории функций действительных переменных и дифференциальных уравнений)

4.3.2 Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
УК ОС-9.1	- Способность производить операции над матрицами, вычислять определители, решать системы линейных уравнений.	Умеет выполнять операции над матрицами (складывать, умножать, обращать, вычислять определители 2-го, 3-го, n-го порядков), решать системы линейных уравнений.
	- Способность производить операции над геометрическими векторами, составлять уравнения прямой и плоскости, классифицировать кривые 2-го порядка.	Умеет находить скалярное и векторное произведения геометрических векторов, составлять различные типы уравнений прямой, плоскости и прямой в пространстве, знать канонические уравнения и строить кривые 2-го порядка.
	- Знание основных понятий и результатов из теории векторных и евклидовых пространств, применять эти результаты к решению конкретных задач, например, аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов.	Умеет находить ортонормированный базис векторного пространства, решать метрические задачи в евклидовых пространствах, применять метод наименьших квадратов к конкретным задачам аппроксимации.
УК ОС-9.2	- Знание основных свойств и методов исследования функций одной и многих переменных.	Умеет исследовать функции, строить графики и решать задачи оптимизации для функций одной и нескольких переменных.
	- Способность производить алгебраические операции над комплексными	Умеет преобразовывать алгебраические выражения с комплексными числами и извлекать корень n-ой степени из

	числами.	комплексного числа.
	- Владеть методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений	Умеет решать задачу Коши для дифференциальных уравнений, а также решать различные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

4.3.3 Типовые контрольные задания или иные материалы (типовые оценочные материалы), необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Вариант зачетного задания (Раздел 1)

Темы:

- Матрицы.
- Системы линейных уравнений.
- Определители.
- Элементы аналитической геометрии.
- n-мерные векторные пространства.

1. Известна таблица баланса двух отраслей промышленности:

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	**2**		
1	15	10	5	30
2	20	30	10	60

a) По данным таблицы составить матрицу прямых затрат и определить, является ли она продуктивной?

b) Найти произведение матриц $A\cdot\overline{x}$, где A – матрица прямых затрат, а $\overline{x}$ – вектор валового продукта.

2. Дана однородная система линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1+6x_2+5x_3-15x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+4x_3-11x_4=0 \end{cases}$:

a) найти ранг матрицы системы;

b) показать, что система имеет нетривиальное решение;

c) решить систему: выписать общее решение, найти нетривиальное частное решение и сделать для него проверку.

3. Дана матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) найти минор и алгебраическое дополнение элемента b_{23} матрицы B;

b) вычислить определитель матрицы B методом разложения по 3-ему столбцу;

c) показать, что матрица B обратима и найти матрицу обратную к матрице B (B^{-1}), сделать проверку (т.е. показать, что $BB^{-1}=E$).

4. Даны ортогональные векторы $\overline{u}=\overline{p}-\overline{q}$ и $\overline{v}=\overline{p}+2\overline{q}$, где $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$. Найти:

   a) скалярное произведение векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$;

   b) угол между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$;

   c) длину вектора $\overline{u}$.

5. Дана система векторов: $\overline{a}_1=(1,\ -1,\ 3)$, $\overline{a}_2=(-1,\ 2,\ 0)$, $\overline{a}_3=(-1,\ 3,\ 3)$, $\overline{a}_4=(-2,\ 5,\ 3)$.

   a) Доказать, что данная система векторов является линейно зависимой.

   b) Проверить справедливость неравенства треугольника для векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

Вариант экзаменационного задания (РАЗДЕЛ 2)

1. **a)** Выписать второй замечательный предел, а затем вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+3}\right)^{x-4}$.

   b) Для функции $y=e^{x+1}-5$ найти обратную функцию $x=f^{-1}(y)$ и указать её область определения ($D(f^{-1})$) и область значений ($E(f^{-1})$).

2. Вычислить неопределённый интеграл методом интегрирования по частям: $\int(x-7)\cos 2x\,dx$.

3. Дана функция $z=x^2-y^2$. Найти:

   a) линию уровня (уравнение и изобразить), проходящую через точку $A(-2, 2)$;

   b) экстремум функции $z(x,y)$ при условии $y=2x-6$.

4. **a)** Найти целое число равное сумме: $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

   b) Изобразить на комплексной плоскости все точки z, удовлетворяющие соотношению: $\begin{cases}|z+2i|>2,\\ |z-2+2i|\ge 2.\end{cases}$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$.

Шкала оценивания (1-2 семестры)

85-100 баллов	<u>На зачете</u> Умеет выполнять операции над матрицами (складывать, умножать, обращать, вычислять определители 2-го, 3-го, n-го порядков), решать системы линейных уравнений; умеет находить скалярное и векторное произведения геометрических векторов, составлять различные типы уравнений прямой, плоскости и прямой в пространстве, знать канонические уравнения и строить кривые 2-го порядка; умеет находить ортонормированный базис векторного пространства, решать метрические

	задачи в евклидовых пространствах, применять метод наименьших квадратов к конкретным задачам аппроксимации. Задачи решены полностью без существенных ощибок. На экзамене Умеет исследовать функции, строить графики и решать задачи оптимизации для функций одной и нескольких переменных. Умеет преобразовывать алгебраические выражения с комплексными числами и извлекать корень n-ой степени из комплексного числа. Умеет решать задачу Коши для дифференциальных уравнений, а также решать различные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Задачи решены полностью без существенных ощибок.
84-70 баллов	На зачете Умеет выполнять операции над матрицами (складывать, умножать, обращать, вычислять определители 2-го, 3-го, n-го порядков), решать системы линейных уравнений; умеет находить скалярное и векторное произведения геометрических векторов, составлять различные типы уравнений прямой, плоскости и прямой в пространстве, знать канонические уравнения и строить кривые 2-го порядка; умеет находить ортонормированный базис векторного пространства, решать метрические задачи в евклидовых пространствах, применять метод наименьших квадратов к конкретным задачам аппроксимации. Три задачи решены полностью, две – с недочетами. На экзамене Умеет исследовать функции, строить графики и решать задачи оптимизации для функций одной и нескольких переменных. Умеет преобразовывать алгебраические выражения с комплексными числами и извлекать корень n-ой степени из комплексного числа. Умеет решать задачу Коши для дифференциальных уравнений, а также решать различные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Три задачи решены полностью, две – с недочетами.
69-55 баллов	На зачете умеет выполнять операции над матрицами (складывать, умножать, обращать, вычислять определители 2-го, 3-го, n-го порядков), решать системы линейных уравнений; с ошибками находит скалярное и векторное произведения геометрических векторов, неуверенно составляет различные типы уравнений прямой, плоскости и прямой в пространстве; умеет находить ортонормированный базис векторного пространства, решает метрические задачи в евклидовых пространствах, допуская многочисленные ошибки. Две задачи решены полностью, в остальных есть существенные недочеты. На экзамене Умеет исследовать функции, строить графики и решать задачи оптимизации для функций одной и нескольких переменных. Умеет преобразовывать алгебраические выражения с комплексными

	числами и извлекать корень n-ой степени из комплексного числа. Умеет решать задачу Коши для дифференциальных уравнений, а также решать различные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка и линейные дифференциальные уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Две задачи решены полностью, в остальных есть существенные недочеты.
Менее 55 баллов	На зачете Программа курса не освоена, экзаменационное задание выполнено с существенными многочисленными ошибками или не выполнено вовсе. На экзамене Программа курса не освоена, экзаменационное задание выполнено с существенными многочисленными ошибками или не выполнено вовсе.

Перевод баллов в традиционную систему оценки:

Баллы по 100-балльной системе	Пятибалльная система оценки	Система оценивания «зачтено-не зачтено»
85-100 баллов	отлично	Зачтено
70-84 баллов	хорошо	зачтено
55-69 баллов	удовлетворительно	зачтено
Менее 55 баллов	неудовлетворительно	Не зачтено

4.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Все зачёты и экзамены проводятся в письменной форме.

На выполнение задания отводится 90 минут (2 академических часа).

Результаты объявляются на 3-й рабочий день после даты экзамена, в этот же день возможен показ работ и получение обратной связи от преподавателя. В отдельных случаях возможно устное собеседование по выполненной работе.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

5.1. Методические рекомендации для подготовки к работе на лекциях

При подготовке к предстоящей лекции студенту необходимо в первую очередь освежить в памяти материал предыдущей лекции. Для этого можно использовать конспект (предполагается, что студент конспектирует содержание лекций) и соответствующий раздел или разделы рекомендуемой литературы. Например, к разделу 1 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» имеется методическое пособие, написанное специально для студентов ИБДА («Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», Методическое пособие), что не исключает и другую литературу.

Иногда на лекции преподаватель формулирует интересные (сложные) задачи для самостоятельного решения. Желательно при подготовке к следующей лекции постараться решить или хотя бы вникнуть в содержание этих задач.

Обычно лекция заканчивается перечнем вопросов или перечнем тем, которые планируется рассмотреть на следующей лекции. Было бы хорошо, чтобы студенты самостоятельно, используя литературу, ознакомились с содержанием тем предстоящей лекции.

5.2. Методические рекомендации для подготовки к семинарам

Семинарские занятия по математике – это почти всегда решение задач. По образному выражению известного математика Дьёрдье По́йа: *«…если хотите научиться плавать, то смело входите в воду, если хотите научиться решать задачи, то решайте их…»*.

Поэтому первое, что необходимо сделать студенту для подготовки к семинару – это решить (или хотя бы постараться решить) задачи, заданные на дом. Решение конкретных задач неразрывно связано с освоением теоретического материала и разбором соответствующих примеров, рассмотренных на лекциях и в учебниках. Часто на этом пути у студентов возникают вопросы.

При подготовке к семинару студенту необходимо подготовить перечень вопросов, которые он хотел бы задать преподавателю. При этом вопросы условно делятся на две категории: вопросы, относящиеся к теоретическому материалу и вопросы по решению домашних задач. Желательно, чтобы эти вопросы носили конкретный характер, т.е. студент должен корректно сформулировать, что ему не ясно в том или ином разделе теории или какие трудности возникли при решении определённой задачи.

Особую трудность составляют задачи на доказательство, хотя их и немного. Задачи этого типа почти исключены из школьного курса математики и многие студенты, вчерашние школьники, так и не научились выстраивать логически обоснованные рассуждения. В этой ситуации для студента было бы полезно ещё до семинара изложить своё доказательство кому-нибудь из одногруппников, чтобы проверить убедительность своих доводов.

5.3. Методические рекомендации по подготовке и выполнению контрольных работ

Письменные контрольные работы – основная форма текущего контроля знаний по данной дисциплине.

Контрольные работы не переписываются.

Обычно преподаватель заранее называет темы, которые войдут в ближайшую контрольную работу. И после этого все семинарские занятия предшествующие этой контрольной работе являются, по сути, неявной подготовкой к ней. Здесь подойдут все рекомендации предыдущего раздела, относящегося к подготовке к семинарам, за исключением задач на доказательство, которых нет в контрольных работах.

На семинаре, предшествующем контрольной, или чуть ранее, студентам раздаются пробные варианты (обычно два: «Вариант *X*» и «Вариант *Y*»). Студенту необходимо составить подробное решение этих вариантов и обсудить его с преподавателем, обычно это происходит на последнем семинаре перед контрольной работой. Каждая задача пробного варианта соответствует отдельной теме, поэтому, если при решении одной из таких задач у студента возникают трудности, то ему необходимо самостоятельно решить ещё несколько задач на соответствующую тему, используя рекомендованную литературу.

5.4. Методические рекомендации по подготовке к зачету, экзамену

Примерно за две недели до зачёта (экзамена), а иногда, если это необходимо и раньше, студентам раздаётся программа зачёта (экзамена). В программе перечислены все темы, вынесенные на экзамен, и приведено подробное содержание этих тем. Основная часть программы – это образцы зачётных или экзаменационных заданий, примерно по десять образцов на каждое задание.

Для подготовки к зачёту (экзамену) студент должен самостоятельно выполнить все задания программы, а затем постараться активно участвовать в их обсуждении на семинарах. Кроме этого, необходимо разобрать вопросы для самоподготовки по каждой из тем зачёта (экзамена) из 6-го раздела данной программы. Хорошим дополнением ко всему проделанному было бы решение соответствующих задач из рекомендованной литературы. И последнее – подготовить вопросы, которые студент хотел бы задать на консультации, предшествующей экзамену.

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1 Основная литература

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 447 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3600-1. Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/FD221E5F-A6B9-41AC-952D-3AD7780A8F46
2. Высшая математика для экономического бакалавриата в 3 ч. Часть 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / под ред. Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 276 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05820-8. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/FA102CC2-D5ED-4284-A586-33ECB957EF0E .
3. Чирский В.Г., Шилин К.Ю., Математический анализ и инструментальные методы решения задач, кн. 1,2. – Москва: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2019.

6.2 Дополнительная литература

1. В.Л. Миронов, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, Методическое пособие**,** издательство Дело**,** 2010

6.3 Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Не используется

6.4 Нормативные правовые документы

Не используются

6.5 Интернет-ресурсы

Не используются

6.6 Иные источники

Не используются

7. Материально-техническая база, информационные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Для проведения занятий по дисциплине необходимы аудитории лекционного типа и семинарского типа соответствующей вместимости, оборудованные доской и маркерами.

Информационные технологии не применяются.