

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Институт государственной службы и управления
Кафедра информатики и прикладной математики

УТВЕРЖДЕНА
решением кафедры информатики
и прикладной математики

Протокол от «26» августа 2019 г.
№ 1

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.18.01 Теория вероятностей

(индекс, наименование дисциплины, в соответствии с учебным планом)

38.03.04 Государственное и муниципальное управление

(код, наименование направления подготовки)

Цифровое государство

(направленность (профиль))

бакалавр

(квалификация)

очная

(форма обучения)

2020

(год набора)

Москва, 2019 г.

Авторы-составители:

доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики Данчул А.Н.,

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики Жуликов С.Е.,

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и прикладной математики Сафонова Т.Е.

Заведующий кафедрой

кандидат технических наук, доцент, исполняющий обязанности заведующего кафедрой информатики и прикладной математики, заместитель директора Института государственной службы и управления Корчагин Р.Н.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы.....	4
2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО	4
3. Содержание и структура дисциплины	5
4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине.....	6
5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	24
6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	27
6.1. Основная литература.....	27
6.2. Дополнительная литература	27
6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.....	28
6.4. Нормативные правовые документы.....	28
6.5. Интернет-ресурсы.....	28
6.6. Иные источники.....	28
7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы.....	29

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы

1.1. Дисциплина Б1.В.18.01 «Теория вероятностей» обеспечивает овладение следующими компетенциями с учетом этапа:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПК-6	Владение навыками количественного и качественного анализа при оценке состояния экономической, социальной, политической среды, деятельности органов государственной власти Российской Федерации, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, органов местного самоуправления, государственных и муниципальных, предприятий и учреждений, политических партий, общественно-политических, коммерческих и некоммерческих организаций	ПК-6.1	Знание и способность применять методы и модели теории оптимизации как компоненты планово-прогнозной деятельности в сфере государственного и муниципального управления и развития навыков в области их применения

1.2. В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:

ОТФ/ТФ (при наличии профстандарта, или по результатам форсайт-сессии)	Код этапа освоения компетенции	Результаты обучения
применять современные информационные технологии для анализа состояния и результатов деятельности органа государственной власти Российской Федерации, органа местного самоуправления, государственного и муниципального предприятия (учреждения), коммерческой (некоммерческой) организации.	ПК-6.1	на уровне знаний: имеет представление о методах и специализированных средствах осуществления аналитических работ
		на уровне умений: уверенно владеет методами и специализированными средствами при осуществлении аналитических работ
		на уровне навыков: обоснованно применяет методы математического моделирования социально-экономических явлений и процессов

2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО

Общая трудоемкость Б1.8.18.01 «Теория вероятностей» составляет 4 зачетные единицы, 144 часа. Количество академических часов, выделенных на контактную работу с преподавателем, составляет 64 часа: лекционные занятия – 32, практические занятия – 32 часов. Самостоятельная работа составляет 44 часа, контроль – 36 часов.

Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина Б1.8.18.01 «Теория вероятностей» изучается в 3 семестре.

Дисциплина Б1.В.18.01 «Теория вероятностей» относится к дисциплинам вариативной части Блока 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина реализуется после изучения: Б1.Б.08.01 «Линейная алгебра» (1 семестр); Б1.Б.08.02 «Математический анализ» (1 и 2 семестр).

В свою очередь, дисциплина «Теория вероятностей» является опорой для изучения следующих дисциплин: Б1.В.18.02 «Статистика» (4 семестр); Б1.8.18.03 «Эконометрика» (5 семестр).

Форма промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом – экзамен (3 семестр).

3. Содержание и структура дисциплины Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины (модуля), час.						Форма текущего контроля успеваемости*, промежуточной аттестации**
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СР	
			Л	ЛР	ПЗ	КСР		
Тема 1	Случайные события	32	8		8		16	О, 3, ДЗ, ДКР
Тема 2	Случайные величины	48	16		16		16	О, 3, ДЗ, АКР, ДКР
Тема 3	Случайные процессы	28	8		8		12	О, 3, ДЗ, ДКР
Промежуточная аттестация		36						Экз
Всего:		144	32		32		44	

Примечание:

* - формы текущего контроля успеваемости: опрос (О), домашняя контрольная работа (ДКР), аудиторная контрольная работа (АКР), задачи (З), домашнее задание (ДЗ).

** - формы промежуточной аттестации: экзамен (Экз).

Содержание дисциплины

Тема 1. Случайные события.

Основные понятия теории вероятностей. Случайные события. Вероятность события (классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности).

Теоремы сложения вероятностей. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Тема 2. Случайные величины.

Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Их свойства. Начальные и центральные моменты случайных величин.

Основные законы распределения случайных величин: равномерное, Бернулли, Пуассона, экспоненциальное, нормальное.

Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Многомерные случайные величины. Функция распределения и плотность двумерной случайной величины. Зависимые и независимые случайные величины. Условные за-

коны распределения. Числовые характеристики двумерных случайных величин. Ковариация, коэффициент корреляции.

Тема 3. Случайные процессы.

Случайные процессы. Функция распределения и плотность для случайного процесса. Характеристики случайных процессов.

Цепи Маркова. Марковские процессы. Потоки событий. Уравнения Чепмена-Колмогорова. Предельные вероятности состояний.

Основные понятия теории массового обслуживания. Процессы гибели и размножения. Системы массового обслуживания (СМО) с отказом и с ожиданием. Замкнутые системы массового обслуживания. СМО со «взаимопомощью» между каналами. СМО с ошибками. Задачи, решаемые методами теории массового обслуживания.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Формы и методы текущего контроля успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации

4.1.1. В ходе реализации дисциплины Б1.В.18.01 «Теория вероятностей» используются следующие методы текущего контроля успеваемости обучающихся:

Тема (раздел)		Формы (методы) текущего контроля успеваемости
Тема 1	Случайные события	Опрос, домашняя контрольная работа, домашнее задание, задачи
Тема 2	Случайные величины	Опрос, аудиторная контрольная работа, домашняя контрольная работа, домашнее задание, задачи
Тема 3	Случайные процессы	Опрос, домашняя контрольная работа, домашнее задание, задачи

4.1.2. Экзамен проводится с применением следующих методов (средств): в устной форме по вопросам.

4.2. Материалы текущего контроля успеваемости.

Преподаватель оценивает уровень подготовленности обучающихся к занятию по следующим показателям:

- устные ответы на вопросы преподавателя по теме занятия,
- решение практических задач,
- выполнение домашних заданий,
- выполнение контрольных работ (домашних и аудиторных).

Оценка знаний, умений, навыков проводится на основе балльно-рейтинговой системы 60% из 100% (60 баллов из 100) – вклад по результатам посещаемости занятий, активности на занятиях, решение практических задач на семинарских занятиях, ответов на вопросы преподавателя в ходе занятия, по результатам выполнения домашних заданий и контрольных работ.

Вопросы для подготовки к опросам, домашним и контрольным работам, семинарским занятиям по темам:

Тема 1. «Случайные события»

1. Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и их классификация.

2. Вероятность события. Классическое, статистическое и геометрическое определения.
3. Действия над событиями.
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Зависимые и независимые события. Условная вероятность.
6. Формула полной вероятности. Теорема Байеса.
7. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теорема Пуассона.
8. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Семинар № 1.

1. Решить задачи:

а) Сколькими способами можно расположить на полке пятитомное собрание сочинений?

б) В математическом кружке 25 членов. Необходимо избрать председателя, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту руководящую четверку, если одно лицо может занимать только один пост?

в) В районной организации некоторой партии насчитывается 150 членов. Сколькими способами можно избрать 6 делегатов на съезд.

г) Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются одна карта. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

д) Четирем игрокам раздается поровну колода из 36 карт. Определить вероятность того, что каждый игрок получил карты только одной масти?

е) Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной.

Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова: а) «событие»; б) «статистика»?

ж) Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр.

Какова вероятность того, что в нем все цифры: различные; одинаковые; нечетные. Известно, что номер телефона не может начинаться с цифры ноль.

2. Решить задачи:

Среди 25 студентов, из которых 15 девушек, разыгрываются 4 приглашения на дискотеку, причем каждый может выиграть только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся а) только девушки, б) только юноши?

На дом

Какова вероятность того, что среди обладателей билета окажутся две девушки и двое юношей?

Семинар № 2.

1. Решить задачи:

а) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры могут повторяться? При условии, что ни одна цифра не повторяется?

б) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1?

2. Решить задачи:

а) Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него квадрата?

б) В районе площадью 16 кв. км находится объект противника. Для его обнаружения выслана разведывательная группа. Оценить эффективность действия разведывательной группы через 1 час ведения разведки, если ее скорость передвижения в районе составляет 3 км/час при эффективном радиусе обнаружения 1 км.

3. Решить задачи:

а) Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

б) В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

4. Решить задачи:

а) Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча, а после игры кладут их обратно. При выборе мячей иггранные от неиггранных не отличаются. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неиггранных мячей?

б) В одной группе 18 студентов, из которых 9 учатся на «отлично». В другой – 16 студентов, из которых на «отлично» учатся 4. Из каждой группы случайным образом выбрали по одному студенту. Какова вероятность того, что а) студент каждой группы учится на «отлично»; б*) оба учатся на «отлично»?

в) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос, студент понял, что он его знает. Какова вероятность того, что студент: а) сдаст зачет; б) не сдаст зачет?

Семинар № 3.

1. Решить задачи:

а) Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9 третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: только второй экзамен; только один экзамен.

б) Прибор, работающий в течение времени t , состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из строя целиком. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равно 0,9; второго – 0,95, а третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в течение времени t прибор выйдет из строя.

в) Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее чем в двух справочниках.

3. На полке стоит 10 книг, среди которых три книги по теории вероятностей. Наудачу берутся три книги. Какова вероятность того, что среди отобранных есть хотя бы одна книга по теории вероятностей?

На дом

На связке 5 ключей. К замку подходит только один ключ. Найти вероятность того, что потребуется не более двух попыток открыть замок, если опробованный ключ в дальнейших испытаниях не участвует.

4. По результатам проверки зачетных работ оказалось, что в первой группе получили зачет 20 студентов из 30, а во второй 16 из 32. Какова вероятность того, что наудачу выбранная зачетная работа принадлежит студенту первой группы?

На дом

Два стрелка сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,5. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что пробоина принадлежит второму стрелку.

5. В семье двое детей. Известно, что один из них мальчик. Какова вероятность, что оба ребенка – мальчики?

6*. Решить задачи:

а) Среди клиентов банка 80% являются физическими лицами и 20% – юридическими. Из практики известно, что 40% всех операций приходится на долгосрочные расчеты, и в тоже время из общего числа операций, связанных с физическими лицами, 30% приходится на долгосрочные расчеты.

Какова вероятность того, что наудачу выбранный клиент является юридическим лицом и осуществляет долгосрочный расчет?

б) Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 4%, а вследствие дефекта В – 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%.

Найти вероятность того, что: а) среди продукции, не обладающей дефектом А, встретится дефект В; б) среди забракованной по признаку А продукции встретится дефект В.

в) В магазине продаются 10 телевизоров, 3 из которых имеют дефекты. Какова вероятность того, что посетитель купит телевизор, если для выбора телевизора без дефектов понадобится не более трех попыток?

Семинар № 4.

1. Решить задачи:

а) В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1: 4: 5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

б) Страховая компания разделяет застрахованных клиентов по классам риска: I – малый риск, II – средний, III – большой риск. Среди этих клиентов: 50% – первого класса риска, 30% – второго и 20% – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго 0,03 и третьего – 0,08.

Какова вероятность того, что: застрахованный клиент получит денежное вознаграждение за период страхования; получивший денежное вознаграждение застрахованный клиент относится к группе малого риска?

в) В урне два белых и три черных шара. Два игрока по очереди вынимают из урны по шару, не возвращая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

г) Два руководителя планируют создать совместное предприятие, если в течение года каждому из них удастся сформировать свою долю начального капитала. Вероятности этого равны соответственно 0,4 и 0,7. По истечении года выяснилось, что совместное предприятие не может быть создано. Какова вероятность того, что каждый участник сумел накопить свою долю начального капитала?

На дом

д) В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

е) Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, а второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

ж) Из урны содержащей три белых и пять черных шаров, два человека вынули поочередно по шару (без возвращения). Какова вероятность того, что первый вынул белый шар, если второй вынул черный?

з) Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго – 0,3. Какова вероятность того, что первый сделает больше выстрелов?

3. Вероятность, что малое предприятие станет банкротом в течение года равна 0,2. Найти вероятность, что из восьми малых предприятий за первый год обанкротятся два предприятия.

На дом

Найти вероятность, что из восьми малых предприятий за первый год обанкротятся более двух предприятий.

5. В институте обучается 730 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна $1/365$. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января, оценить вероятность такого события.

6. Фирма раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы показывает, что на 500 рекламных листов приходится один заказ. Оценить вероятность того, что при размещении 25 тысяч листов число заказов будет равно 48.

На дом

Оценить вероятность того, что при размещении 25 тысяч листов число заказов будет находиться в пределах от 45 до 55.

7. Решить задачи

а) Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: тираж содержит 5 бракованных книг; по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

б) Для поражения цели необходимо не менее трех попаданий. Определить вероятность поражения цели, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3 и производится пять выстрелов.

в) Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

На дом

г) При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб.: не менее 300; от 300 до 400 включительно.

д) Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды; вероятность попадания каждой – $3/4$. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

е) Вероятность того, что событие А появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероятность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Домашняя контрольная работа

Задача 1. Классическое определение вероятности.

Бросают два кубика. Суммируют число очков, выпавших на верхних гранях кубиков. Построить множество элементарных событий Ω и его подмножество, соответствующее событию $A = \{\text{сумма очков больше } 3\}$. Найти вероятность события А. Построить подмножество, соответствующее событию \bar{A} (дополнение А). Найти его вероятность.

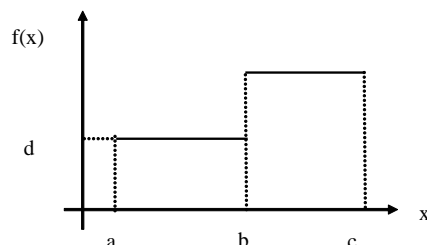
Задача 2. Условная вероятность. Формула Байеса.

Два стрелка сделали по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна p_1 , для второго – p_2 . В мишени оказалась

одна пробоина. Найти вероятность того, что она появилась в результате выстрела первого стрелка: $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,7$.

Задача 3. Формула Байеса.

В одном сосуде находятся B_1 белых и $Ч_1$ черных шаров. Во втором – B_2 белых и $Ч_2$ черных. Бросают два кубика. Если сумма очков, выпавших на верхних гранях, меньше 10, берут шар из первого сосуда, если больше или равна 10 – из второго. $B_1 = 7$; $Ч_1 = 6$; $B_2 = 5$; $Ч_2 = 9$. Вынут белый шар. Какова вероятность того, что сумма очков была не меньше 10?



Тема 2. «Случайные величины»

1. Случайная величина и ее закон распределения. Дискретные и непрерывные случайные величины.
2. Основные законы распределения случайных величин: равномерное, Бернулли, Пуассона, экспоненциальное, нормальное.
3. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Их свойства.
4. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.
5. Мода, медиана, квантили. Начальные и центральные моменты случайных величин.
6. Неравенства Маркова и Чебышева.
7. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Пуассона.
8. Центральная предельная теорема
9. Многомерные случайные величины.
10. Функция и плотность распределения двумерной случайной величины. Их свойства.
11. Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения.
12. Числовые характеристики двумерных случайных величин. Ковариация, коэффициент корреляции.

Семинар № 1.

1. Решить задачи:

а) Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

б) Дана случайная величина X :

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y=3X$; б) $Z=X^2$.

Построить функцию распределения, найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение исходных и полученных случайных величин.

2. Решить задачи:

а) Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.

б) Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

в) В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

г) Случайные величины X и Y независимы и имеют один и тот же закон распределения:

Значение – x_i	1	2	4
Вероятность – p_i	0,2	0,3	0,5

Составить закон распределения случайных величин $2X$ и $X+Y$. Убедиться в том, что $2X \neq X+Y$, но $M[2X] = M[X+Y]$.

На дом

д) Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляются. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела, и вычислить математическое ожидание этой случайной величины.

е) Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

ж) Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины, построить функцию распределения.

з) Два стрелка сделали по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7. Необходимо: составить закон распределения общего числа попаданий; найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Семинар № 2.

1. Вычислить значения плотности равномерного распределения, сосредоточенного на интервале $[a, b]$, значения функции этого равномерного распределения для массива аргумента от -1 до 4 с шагом 0,1. Построение выполнить для $a = 1$, $b = 3$. При вычислении использовать логические функции. Построить графики плотности этого равномерного распределения и функции этого распределения.

2. Малое предприятие оказывается банкротом в течение года с вероятностью p . Найти вероятности того, что в течение года банкротами станут 0, 1, 2, 3, 4, 5 малых предприятий из пяти зарегистрированных в данном регионе. Вычислить с использованием стандартной функции Excel (БИНОМРАСП) для $p = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 0,8$. Построить полученные распределения графически. Найти наиболее вероятное число предприятий, ставших банкротами, для каждого из указанных значений вероятности.

3. Построить таблицу значений плотности и функции нормального распределения с параметрами a и σ на интервале $[-5, 5]$ с шагом 0,1 (с использованием стандартной функции Excel (НОРМРАСП)). Построить графики полученных функций. Проанализировать зависимость формы и положения графика от значений параметров. Остановиться на графиках стандартного нормального распределения ($a = 0; \sigma = 1$).

4. Использование нормализованных значений (НОРМАЛИЗАЦИЯ), определение квантилей.

Школьник участвует в двух олимпиадах. На одной он набрал 70 баллов, на другой – 80. Где он выступил удачнее, если средний балл участника первой олимпиады равен 60, а второй – 70, стандартное отклонение в первом случае равно 5, а во втором – 10? Проиллюстрировать результат на графике.

На дом

Построение и анализ графиков плотностей и функций распределений Пуассона и экспоненциального с использованием стандартных функций Excel (ПУАССОН, ЭКС-ПРАСП) по заданию, выданному на занятии.

Семинар № 3.

1. Решить задачи:

а) Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 у.е. и средним квадратическим отклонением 0,2 у.е.

Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 у.е.; б) не ниже 15,4 у.е.; в) от 14,9 до 15,3 у.е. С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

б) Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что масса коробок с конфетами имеет нормальное распределение, а 5% коробок имеют массу, меньшую 500 г. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) более 550 г; г) отличается от средней не более, чем на 30 г (по абсолютной величине)?

2. Решить задачи:

а) Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено: более 150 клиентов; не более 200 клиентов.

б) Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине). Найти вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра–Лапласа.

в) В течение времени t эксплуатируются 500 приборов. Каждый прибор имеет надежность 0,98 и выходит из строя независимо от других. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что доля надежных приборов отличается от 0,98 не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

г) По опыту работы страховой компании, страховой случай приходится на каждый пятый договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева, сколько договоров следует заключить, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится от 0,1 не более чем на 0,01 (по модулю).

Семинар № 4.

1. Решить задачи:

а) Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

б) Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна $2/3$.

Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов.

в) Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y:

X_i	0	1	3
p_i	0,2	0,5	?

y_i	2	3
p_i	0,4	?

Найти вероятности, с которыми случайные величины принимают значение 3, а затем составить закон распределения случайной величины $3X - 2Y$ и проверить выполнение свойств математических ожиданий и дисперсий:

$$M[3X - 2Y] = 3M[X] - 2M[Y], D[3X - 2Y] = 9D[X] + 4D[Y].$$

г) Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Найти условную вероятность события $X < 5$ при условии, что $X > 2$.

д) Случайная величина X, сосредоточенная на интервале (1;4), задана квадратичной функцией распределения $F(x) = ax^2 + bx + c$, имеющей максимум при $x = 4$. Найти параметры a, b, c и вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал [2;3].

е) На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

а) для первого

X	0	1	2
p_i	0,1	0,6	0,3

б) для второго

Y	0	2
p_i	0,5	0,5

Необходимо: а) составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками; б) проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

з) Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найти: плотность вероятности $f(x)$; математическое ожидание; дисперсию; вероятности $P(X = 0,5)$; $P(X < 0,5)$; $P(0,5 \leq X \leq 1)$; построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

и) Случайные величины X_1, X_2 независимы и имеют одинаковое распределение

x_i	0	1	2	3
p_i	1/4	1/4	1/4	1/4

Найти: вероятность события $X_1 + X_2 > 2$

условную вероятность $P(X_1 + X_2 > 2 / X_1 = 1)$.

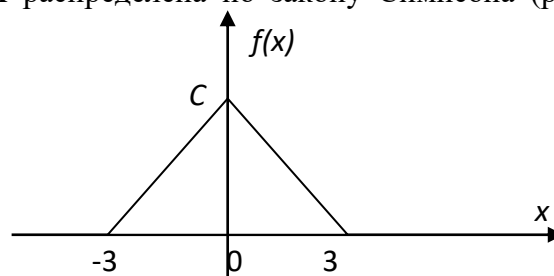
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ Cxe^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

к) Дана функция

При каком значении параметра C эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины X?

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

л*) Случайная величина X распределена по закону Симпсона (равнобедренного треугольника) на отрезке [-3; 3]:



Найти:

- выражения плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$;
- числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\mu_3[X]$;
- вероятность $P(-3/2 < X < 3)$ и показать ее на данном в условии графике $f(x)$ и построенном графике $F(x)$.

Семинар № 5.

1. Решить задачи:

Случайная величина X имеет следующий закон распределения.

Значение	1	2	4
Вероятность	0,2	0,3	0,5

Составить закон распределения случайных величин $Z = 2X$ и $W = X + Y$. Построить функции распределения случайных величин X , Z и W . Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайных величин X , Z и W .

3. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону, т.е. $N(0;1)$.

4. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Найти: законы распределения одномерных случайных величин X и Y ; условные законы распределения случайной величины X при условии $Y = 2$ и случайной величины Y при условии $X = 1$; вероятность $P(Y > X)$. Определить: ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y ; выяснить коррелированы или не коррелированы эти случайные величины.

Семинар № 6.

1. Найти интегральную функцию распределения для числа попаданий и промахов по мишени при одном выстреле, вероятность попадания при котором равна p .

2. Решить задачи:

а) Закон распределения двумерной случайной величины, дан таблицей:

Описать условные законы распределения: случайной величины X при условии, что $Y = 2$, случайной величины Y при условии, что $X = -1$.

$X \backslash Y$		
-1	0,3	0,25
0	0,1	0,05
1	0,2	0,1

за-

ли-

при

б) Двумерная случайная величина задана законом распределения:

Найти условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что $Y = 0$.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,3
1	0,05	0,15	0,2

На дом

В условиях задачи 3а) описать условные законы распределения: случайной величины X при условии, что $Y = 1$, и случайной величины Y при условии, что $X = 1$.

В условиях задачи 3б) найти условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = -1$.

3. Решить задачи:

$X \backslash Y$	-1	1
0	0,1	0,06

а) Закон распределения двумерной случайной величины задан таблицей:

1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

чины,
нент

Найти одномерные законы распределения компонент X , Y и $P(X \geq Y)$.

б) Закон распределения двумерной случайной величины, задан таблицей:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
1	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,05	0,05	0,05	0,05
3	0,1	0,1	0,1	0,1

Определить, зависимы или независимы компоненты X , Y .

Определить $m_x, m_y, D_x, D_y, \sigma_x, \sigma_y, K_{XY}, \rho_{XY}$.

в) Закон распределения двумерной случайной величины, задан таблицей:

$X \setminus Y$	1	2
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

ли-
ви-

Выяснить являются ли случайные величины: зависимы; коррелированными.

На дом

Закон распределения двумерной случайной величины, задан таблицей:

$X \setminus Y$	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Выяснить, зависимы или нет случайные величины.

Семинар № 7.

Двумерная случайная величина задана дифференциальной функцией

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C, & \text{при } x^2 + y^2 < 1; \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases}$$

Найти постоянную C .

3. Известна функция плотности двумерной случайной величины

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} axy, & \text{при } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$; $y = 2$. Найти коэффициент a .

4. Известна функция плотности двумерной случайной величины:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{A}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Найти величину A и функцию распределения $F_{XY}(x, y)$.

5. Найти плотность распределения двумерной случайной величины, если известна функция распределения:

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-2x-3y} - e^{-2x} - e^{-3y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На дом

Двумерная случайная величина задана дифференциальной функцией:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C, & -1 \leq x < 2, 1 \leq y < 3; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти постоянную C . Определить, зависимы или независимы компоненты X , Y .

Найти функцию распределения $F_{XY}(x, y)$.

Семинар № 8.

Аудиторная контрольная работа по теме 2 «Случайные величины».

Образец контрольной работы.

1. случайные величины.
2. Основные законы распределения случайных величин: равномерное, Бернулли, Пуассона, экспоненциальное, нормальное.
3. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Их свойства.
4. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.
5. Мода, медиана, квантили. Начальные и центральные моменты случайных величин.

Задача 1. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Задача 2. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины, построить функцию распределения.

Домашняя контрольная работа

Задача 1. Закон распределения случайной величины. Распределение Бернулли.

В тесте n_1 вопросов. Ответ на каждый вопрос выбирается из n_2 вариантов ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании: $n_1 = 4$; $n_2 = 4$.

Задача 2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины из предыдущей задачи.

Задача 3. Функция распределения и плотность распределения вероятностей СВ. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ.

Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей (см. график). Построить график функции распределения вероятностей, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$a = 0; b = 0,3; c = 1,15; d = 0,5.$$

Задача 4. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей:

$Y \backslash X$	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,2	0,16	0,1
1	0,05	0,1	0,15	0,05

Найти условные законы распределения случайной величины Y при условии $X = -1$ и случайной величины X при условии $Y = 0$.

Задача 52. Найти ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

Тема 3. «Случайные процессы»

1. Случайные процессы и их характеристики.
2. Марковские случайные процессы.

3. Уравнения Чепмена-Колмогорова. Предельные вероятности состояний.
4. Общая характеристика систем массового обслуживания. Потоки событий.
5. Процессы гибели и размножения.
6. Системы массового обслуживания с отказами.
7. Системы массового обслуживания с ожиданием.

Семинар № 1.

1. Решить задачу:

Случайный процесс определяется формулой: $X(t) = Xe^{-t} (t > 0)$, где X – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . Найти математическое ожидание, дисперсию, корреляционную и нормированную корреляционную функцию случайного процесса.

2. Решить задачи:

В моменты времени t_1, t_2, t_3 производится осмотр ЭВМ. Возможные состояния ЭВМ: S_1 – полностью исправна; S_2 – имеет незначительные неисправности; S_3 – имеет существенные неисправности и может решать ограниченный круг задач; S_4 – полностью вышла из строя.

Матрица перехода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент система исправна. Определить вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

На дом

Совокупность семей некоторого региона можно разделить на три группы:

- семьи, не имеющие автомобиля и не собирающиеся его покупать;
- семьи, не имеющие автомобиля, но намеревающиеся его приобрести;
- семьи, имеющие автомобиль.

Проведенное статистическое обследование показало, что матрица перехода за интервал в один год имеет вид

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице P_1 элемент p_{31} означает вероятность того, что семья, имеющая автомобиль, также будет его иметь, а, например, элемент p_{23} – вероятность того, что семья, не имеющая автомобиля, но решившая его приобрести, осуществит свое намерение в следующем году, и т.д.

Найти вероятность того, что семья, не имеющая автомобиля и не собирающаяся его приобрести, будет находиться в такой же ситуации через три года.

На дом

Построить граф состояний следующего случайного процесса: система S состоит из двух автоматов по продаже газированной воды, каждый из которых в случайный момент времени может быть либо занятым, либо свободным.

Семинар № 2.

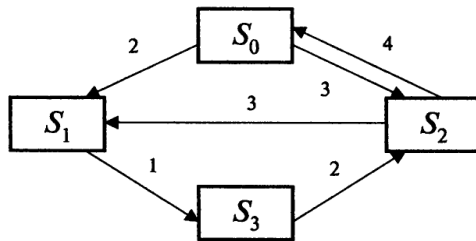
1. Решить задачу:

На автоматическую телефонную станцию поступает простейший (стационарный пуассоновский) поток вызовов с интенсивностью $\lambda = 1,2$ вызовов в минуту. Найти вероят-

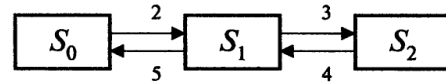
ность того, что за две минуты: а) не придет ни одного вызова; б) придет ровно один вызов; в) придет хотя бы один вызов.

2. Решить задачу:

Найти предельные вероятности для систем S , граф которых изображен на рисунке:
а) – в аудитории, б) – На дом.

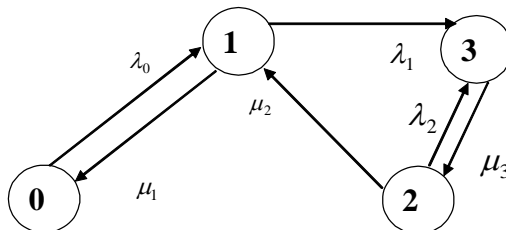


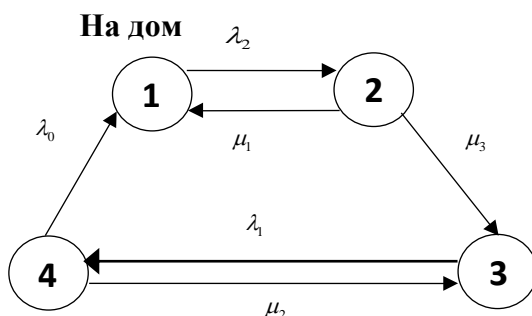
а)



б)

4. Найти стационарные вероятности для Марковского процесса, заданного графом переходов состояний и значениями интенсивностей перехода:





Семинар № 3.

1. Решить задачу:

Имеется станция связи с тремя каналами ($n = 3$), интенсивность потока заявок $\lambda = 1,5$ заявки в минуту; среднее время обслуживания одной заявки $\bar{t}_{об} = 2$ мин., все потоки событий – простейшие. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО.

2. Решить задачи:

а) Воздушная разведка вскрывает в среднем 4 объекта противника в час, для поражения которых выделяется 3 дежурных огневых средства. Огневое средство на поражение объекта затрачивает в среднем 0,5 часа. Ввиду быстрого изменения обстановки вскрытый объект должен обстреливаться немедленно после его обнаружения. Оценить эффективность огневых средств, выделенных для уничтожения объектов противника, которые вскрываются воздушной разведкой.

б) Определить, сколькими линиями телефонной связи необходимо соединить два пункта управления для обеспечения надежности телефонного обмена не хуже 0,8 (отказ в

соединении по причине занятости каналов в среднем за единицу времени должны получать не более 20% абонентов). По опыту за одну минуту поступает в среднем 1,5 заявки на переговоры, а средняя продолжительность разговоров составляет 2 минуты.

Семинар № 4.

1. Решить задачу:

а) В предвыборном штабе некой партии для приема и обработки донесений от наблюдателей на избирательных участках выделены 3 сотрудника. Плотность потока донесений – 15 сообщений в час; среднее время обработки донесения одним сотрудником равно 12 минут. Каждый из сотрудников может принимать донесения от наблюдателя, однако они теряются, если поступают в то время, когда все заняты обработкой других донесений.

Какое количество сотрудников необходимо иметь в группе для обработки не менее 85% поступающих донесений?

2. Решить задачу:

а) Железнодорожная касса по продаже билетов с двумя окошками представляет собой двухканальную СМО с неограниченной очередью, устанавливающейся сразу к двум окошкам (ближайший в очереди пассажир занимает освободившееся окошко). Касса продает билеты в пункты А и В. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билет, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0,45$ пассажира в минуту, а в сумме они образуют общий поток заявок с интенсивностью $\lambda_A + \lambda_B = 0,9$. Кассир тратит на обслуживание пассажира в среднем две минуты. В целях ускорения обслуживания поступило рационализаторское предложение: вместо одной кассы, продающей билеты и в пункты А и В, создать две специализированные кассы (по одному окошку в каждой), продающие билеты одна – только в пункт А, другая – только в пункт В. Проверить полезность рацпредложения.

5. Решить задачу:

а) Дана двухканальная СМО с ожиданием. Интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 12$ заявок в минуту. Интенсивность обслуживания одним каналом $\mu = 8$.

Найти среднюю длину очереди, среднее время ожидания в очереди, среднее время пребывания заявок в системе, коэффициент занятости каналов обслуживания.

б) Дана одноканальная СМО с ожиданием. Интенсивность входящего потока заявок $\lambda = 2$ заявки в мин. Какова должна быть интенсивность обслуживания одним каналом, чтобы средняя длина очереди была равна $\frac{1}{2}$?

6. Решить задачу:

а) В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины.

Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

б) По условию предыдущей задачи найти показатели эффективности работы причала (вероятность того, что причал свободен; вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки; относительная пропускная способность причала; абсолютная пропускная способность причала; среднее число судов, находящихся у причала; среднее время пребывания судна у причала; среднее время ожидания разгрузки (пребывания в очереди); среднее число судов, ожидающих разгрузку (длина очереди).

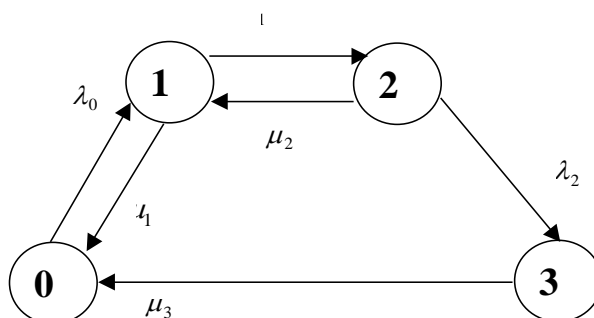
Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Домашняя контрольная работа

Задача 1. Стоматологическая клиника распространяет рекламные листовки. Превышенный опыт показывает, что на пятьдесят распространенных листовок приходится одно обращение в клинику. Найти вероятность того, что при распространении двух тысяч листовок число обращений будет равно 40

Задача 2. Найти вероятность того, что в условиях задачи 3 число обращений в клинику будет находиться между 30 и 60

Задача 3. Найти стационарные вероятности для марковского процесса, заданного графом переходов состояний и значениями интенсивностей перехода:



$\lambda_0 = 1; \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1; \mu_1 = 1; \mu_2 = 2; \mu_3 = 3$

Задача 4. Найти стационарное математическое ожидание для марковского процесса из задачи 5.

4.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПК-6	Владение навыками количественного и качественного анализа при оценке состояния экономической, социальной, политической среды, деятельности органов государственной власти Российской Федерации, органов государственной власти субъектов Российской Федерации, органов местного самоуправления, государственных и муниципальных, предприятий и учреждений, политических партий, общественно-политических, коммерческих и некоммерческих организаций	ПК-6.1	Знание и способность применять методы и модели теории оптимизации как компоненты планово-прогнозной деятельности в сфере государственного и муниципального управления и развития навыков в области их применения

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПК-6.1 Знание и способность применять методы и модели теории оптимизации как компоненты планово-	Знает методы и модели теории оптимизации экономических и политических систем Применяет математические	Глубоко и полно знает основные методы и модели теории оптимизации экономических и политических систем

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
прогнозной деятельности в сфере государственного и муниципального управления и развития навыков в области их применения	методы для целей изучения социально-экономических явлений и процессов и составления управленческих планов и прогнозов	Обоснованно применяет методы математического моделирования социально-экономических явлений и процессов.

Вопросы к экзамену

1. Основные понятия теории вероятностей. Случайные события и их классификация.
2. Вероятность события. Классическое, статистическое и геометрическое определения.
3. Действия над событиями.
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Зависимые и независимые события. Условная вероятность.
6. Формула полной вероятности. Теорема Байеса.
7. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теорема Пуассона.
8. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
9. Случайная величина и ее закон распределения. Дискретные и непрерывные случайные величины.
10. Основные законы распределения случайных величин: равномерное, Бернулли, Пуассона, экспоненциальное, нормальное.
11. Функция распределения случайной величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Их свойства.
12. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.
13. Мода, медиана, квантили. Начальные и центральные моменты случайных величин.
14. Неравенства Маркова и Чебышева.
15. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Пуассона.
16. Центральная предельная теорема
17. Многомерные случайные величины.
18. Функция и плотность распределения двумерной случайной величины. Их свойства.
19. Зависимые и независимые случайные величины. Условные законы распределения.
20. Числовые характеристики двумерных случайных величин. Ковариация, коэффициент корреляции.
21. Случайные процессы и их характеристики.
22. Марковские случайные процессы.
23. Уравнения Чепмена-Колмогорова. Предельные вероятности состояний.
24. Общая характеристика систем массового обслуживания. Потоки событий.
25. Процессы гибели и размножения.
26. Системы массового обслуживания с отказами.
27. Системы массового обслуживания с ожиданием.

Шкала оценивания

Оценка знаний, умений, навыков проводится на основе балльно-рейтинговой системы: 40% из 100% (или 40 баллов из 100) – вклад в итоговую оценку по результатам промежуточной аттестации.

При оценивании ответа обучающегося в ходе промежуточной аттестации можно опираться на следующие критерии:

Баллы	Критерий оценки
26-40	Обучающийся показывает высокий уровень компетентности, знания программного материала, учебной, периодической и монографической литературы и практики их применения, раскрывает не только основные понятия, но и анализирует их с точки зрения различных авторов. Обучающийся показывает не только высокий уровень теоретических знаний, но и видит междисциплинарные связи. Профессионально, грамотно, последовательно, хорошим языком четко излагает материал, аргументированно формулирует выводы. На вопросы отвечает кратко, аргументировано, уверенно, по существу.
16-25	Обучающийся показывает достаточный уровень компетентности, знания материалов занятий, учебной и методической литературы и практики их применения. Уверенно и профессионально, грамотным языком, ясно, четко и понятно излагает состояние и суть вопроса. При ответе допускает несущественные погрешности. Обучающийся показывает достаточный уровень профессиональных знаний, свободно оперирует понятиями, методами оценки принятия решений, имеет представление: о междисциплинарных связях, увязывает знания, полученные при изучении различных дисциплин, умеет анализировать практические ситуации, но допускает некоторые погрешности. Ответ построен логично, материал излагается хорошим языком, привлекается информативный и иллюстрированный материал, но при ответе допускает некоторые погрешности. Вопросы не вызывают существенных затруднений.
6-15	Обучающийся показывает достаточные знания материалов занятий, но при ответе отсутствует должная связь между анализом, аргументацией и выводами. На поставленные членами комиссии вопросы отвечает неуверенно, допускает погрешности. Обучающийся владеет практическими навыками, привлекает иллюстративный материал, но чувствует себя неуверенно при анализе междисциплинарных связей. В ответе не всегда присутствует логика, аргументы привлекаются недостаточно веские. На поставленные вопросы затрудняется с ответами, показывает недостаточно глубокие знания.
0-5	Обучающийся показывает слабые знания материалов занятий, учебной литературы, законодательства и практики его применения, низкий уровень компетентности, неуверенное изложение вопроса. Обучающийся показывает слабый уровень профессиональных знаний, затрудняется при анализе практических ситуаций. Не может привести примеры из реальной практики. Неуверенно и логически непоследовательно излагает материал. Неправильно отвечает на вопросы или затрудняется с ответом.

Шкала перевода из многобалльной системы в традиционную:

обучающемуся выставляется оценка «неудовлетворительно» если обучающийся набрал менее 50 баллов,

оценка «удовлетворительно» выставляется при условии, если обучающийся набрал от 50 до 65 баллов;

оценка «хорошо» выставляется при условии, если обучающийся набрал от 66 до 75 баллов;

оценка «отлично» выставляется при условии, если обучающийся набрал от 76 до 100 баллов;

100 баллов выставляется при условии выполнения всех требований, а также при обязательном проявлении творческого отношения к предмету, умении находить оригинальные, не содержащиеся в учебниках ответы, умении работать с источниками, которые

содержатся дополнительной литературе к курсу, умении соединять знания, полученные в данном курсе со знаниями других дисциплин.

4.4. Методические материалы

Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций проводятся в соответствии с Уставом Академии (утв. Постановлением Правительства Российской Федерации от 12.05.2012 г. N 473), Положением о текущем контроле успеваемости обучающихся и промежуточной аттестации обучающихся в РАНХиГС (утв. Приказом ректора от 30.01.2018 г. № 02-66), Порядке организации и проведения практики обучающихся, осваивающих образовательные программы высшего образования (утв. Приказом ректора от 22.01.2018 г. №02-28).

Устный опрос является одним из основных способов проверки усвоения знаний обучающимися. Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на определенную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях. Основные критерии оценки устного ответа: правильность ответа по содержанию; полнота и глубина ответа; логика изложения материала (учитывается умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией); использование дополнительного материала.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Занятия по дисциплине представлены следующими видами работ: лекциями, практическими занятиями, самостоятельной работой обучающихся.

Подготовка к занятиям должна носить систематический характер. Это позволит обучающемуся в полном объеме выполнить все требования преподавателя. Обучающимся рекомендуется изучать как основную, так и дополнительную литературу, а также знакомиться с Интернет-источниками (список приведен в рабочей программе по дисциплине).

Методические указания для обучающихся по подготовке к лекционным занятиям. Занятия лекционного вида дают систематизированные знания о наиболее сложных и актуальных проблемах изучаемой дисциплины.

Осуществляя учебные действия на лекционных занятиях, обучающиеся должны внимательно воспринимать материал, подготовленный преподавателем, мыслить, добиваться понимания изучаемого предмета. Обучающиеся должны аккуратно вести конспект. В случае недопонимания какой-либо части предмета следует в установленном порядке задать вопрос преподавателю. В процессе работы на лекции необходимо также выполнять в конспектах модели изучаемого предмета (рисунки, схемы, чертежи и т.д.), которые использует преподаватель.

Самостоятельная подготовка обучающихся при подготовке к занятиям лекционного вида включает в себя:

- доработку конспекта лекции, которую желательно осуществлять в тот же день, пока материал еще легко воспроизводим в памяти (через 10 часов после лекции в памяти остается не более 30-40% материала). Необходимо прочитать записи, расшифровать сокращения, доработать схемы, рисунки, таблицы;

- повторение изученного на предыдущем занятии материала.

Методические указания по подготовке к опросу. Подготовка обучающихся к опросу предполагает изучение основной/ дополнительной литературы в соответствии тематикой дисциплины.

Подготовка к тестированию требует от обучающихся тщательного изучения материала по теме или блоку тем, где акцент делается на изучение причинно-следственных связей, раскрытию природы явлений и событий, проблемных вопросов. Для подготовки необходима рабочая программа дисциплины с примерами тестов, учебно-методическим и информационным обеспечением.

Методические указания для обучающихся по выполнению аудиторных контрольных заданий. Контрольные работы являются одной из основных форм текущего контроля преподавателем работы обучающегося и представляет собой решение конкретной задачи. Задача должна быть решена в аудитории с подробным объяснением.

Контрольная работа составляется из задач домашнего задания предыдущих занятий и теоретического вопроса по теме

Методические указания для обучающихся по выполнению домашних контрольных заданий. Контрольное домашнее задание выполняется студентами по индивидуальным вариантам, которые они получают у преподавателя, и предоставляется к определенному сроку. Преподаватель на первом практическом занятии распределяет варианты между студентами. По данной дисциплине регламентированы сроки сдачи контрольной домашней работы:

- срок сдачи первой работы – 8 неделя семестра;
- срок сдачи второй и третьей работы – 15 неделя семестра.

Допускается предварительная защита работы по частям.

Методические указания по организации самостоятельной работы обучающихся. Наряду с прослушиванием лекций и участием в обсуждении проблем на практических занятиях, учебный план предусматривает затрату обучающимися, как правило, большего числа часов для самостоятельной работы.

Эта работа складывается из изучения литературы, в том числе в связи с подготовкой к практическим занятиям, выполнения других заданий преподавателя.

Основным элементом этой работы является изучение основных разделов дисциплины, содержащейся в программе по этой дисциплине, с использованием записей лекций преподавателя, ведущего курс, и рекомендуемой программой (а в ряде случаев и дополнительно преподавателем) литературы – учебников и учебных пособий, монографий и статей по отдельным проблемам данной науки.

Приступая к изучению той или иной темы, выделяемой по предметно-систематизированному принципу, нужно по отдельности и последовательно рассмотреть каждую из частей, из которых состоит тема. При изучении курса, обучающиеся должны уметь пользоваться и научной литературой для самостоятельной подготовки к занятиям. Обучающиеся также должны научиться, используя различные научные источники, грамотно сформировать и подготовить свое научно обоснованное и логически непротиворечивое выступление на практическом занятии, анализировать конкретные факты общественной жизни, осуществлять прогноз относительно возможного направления анализа экономических процессов, формулировать и обосновывать свое мнение.

Без ясного понимания основных понятий образовательный процесс усложняется. Для повышения эффективности обучения необходимо использовать существующие терминологические справочники и толковые словари.

Задачи для самостоятельного решения

1) Для полета на Марс необходимо укомплектовать экипаж космического корабля в составе: командир корабля, первый помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командная тройка может быть отобрана из 25 летчиков, 2 бортинженера – из числа 20 равноценных технических специалистов, а врач – из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж корабля?

2) На тренировке занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

3) В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

4) Из колоды карт (36 карт) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется только один туз.

- 5) Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что книги слева направо в порядке нумерации томов (от 1 до 5)?
- 6) Среди 15 лампочек 4 стандартные. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.
- 7) В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток? из 8 открыток?
- 8) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если допускается повторение этих цифр?
- 9) Какова вероятность того, что наудачу брошенная в круг точка окажется внутри вписанного в него равностороннего треугольника?
- 10) Из ящика, содержащего 5 пар обуви, из которых три пары мужской, а две пары – женской, перекалывают наудачу 2 пары обуви в другой ящик, содержащий одинаковое количество пар женской и мужской обуви. Какова вероятность того, что во втором ящике после этого окажется одинаковое количество пар мужской и женской обуви?
- 11) Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: в разных подгруппах; в одной подгруппе.
- 12) Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9 третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: три экзамена; по крайней мере, два экзамена; хотя бы один экзамен.
- 13) Вероятность того, что студент сдаст экзамен по дисциплине А, равна 0,8. Условная вероятность того, что студент сдаст экзамен по дисциплине В равна: 0,6 при условии, что он экзамен по дисциплине А сдаст; 0,5 при условии, что – не сдаст. Необходимо: 1) Найти вероятность того, что экзамен хотя бы по одной из двух дисциплин студент: сдаст; не сдаст. 2) Определить являются ли события – сдача экзаменов по дисциплинам А и В независимыми?
- 14) Случайная величина X распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием. Вероятность попадания этой случайной величины на отрезок от -1 до $+1$ равна 0,5. Найти выражения плотности вероятности и функции распределения случайной величины X .
- 15) Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся поступающим в институт. Найти математическое ожидание этой случайной величины.
- 16) Среднее изменение курса акции компании в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более чем на 3%.
- 17) В среднем 10% работоспособного населения города – безработные. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10 000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11%.
- 18) Построить граф состояний системы S , представляющей собой электрическую лампочку, которая в случайный момент времени может быть либо включена, либо выключена, либо выведена из строя.
- 19) Среднее число заказов на такси, поступающих на диспетчерский пункт таксопарка в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за две минуты поступит: а) 4 вызова; б) хотя бы один; в) ни одного вызова. (Поток заявок простейший – стационарный пуассоновский).
- 20) На автомобильную мойку, состоящую из 3 боксов, прибывает в среднем 4 автомобиля в час, обслуживание каждого занимает в среднем 0,5 часа. Ввиду активной конкуренции в этой сфере бизнеса прибывший автомобиль должен обслуживаться немедленно после прибытия. Оценить эффективность работы предприятия.

21) Рассчитайте требуемое число каналов для обеспечения телефонной связи на направлении связи с входящим потоком $\lambda = 20$ заявок в час. Вероятность обслуживания заявок должна быть не менее 0,9. Среднее время обслуживания одного разговора – 6 мин.

22) Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с четырьмя каналами (четырьмя группами проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки. Потоки заявок и обслуживания – простейшие. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра не обслуженной.

Найти минимальное число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.

23) В мастерской по ремонту аппаратуры работает 5 опытных радио-мастеров. Все радио-мастера имеют примерно одинаковый опыт: каждый в среднем может отремонтировать в течение дня 2,5 прибора. В среднем в течение дня в ремонт поступает 10 приборов.

Определить основные показатели данной СМО: вероятность того, что очередной поступивший в ремонт прибор застанет всех мастеров занятыми; среднее время ремонта каждого прибора; среднее время ожидания прибора в очереди; среднюю длину очереди; коэффициент загрузки мастеров.

24) Дана одноканальная СМО с ожиданием. Интенсивность обслуживания одним каналом $\mu = 4$ заявки в минуту. Какова должна быть интенсивность входящего потока заявок, чтобы средняя длина очереди была равна 9/4?

25) В универсаме к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81$ чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\bar{t}_{об} = 2$ мин.

Определить минимальное количество контролеров-кассиров n_{min} , при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$ (вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели; средняя длина очереди; среднее время ожидания в очереди; среднее время пребывания заявок в системе (ожидание в очереди и обслуживание); среднее число занятых обслуживанием каналов и коэффициент занятости каналов обслуживания).

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Основная литература

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2011.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 2014.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., 2013.

6.2. Дополнительная литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М., 2011.
2. Очерк по истории теории вероятностей. Б.В. Гнеденко. – М., 2013.
3. Теория вероятностей: Учеб. пособие. Н.И. Чернова – Новосибирск, 2007.
4. Учебно-методическое пособие по математике. Математика. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Под ред. А.Н. Данчула. – М.: Издательство РАГС, 2005.

6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

1. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М., 2006.
2. Теория вероятностей и математическая статистика. В.Е. Гмурман. – М., 2014.
3. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В.Е. Гмурман. – М., 2013.

6.4. Нормативные правовые документы

1. Федеральный закон «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» (принят Государственной Думой 8.07.2006) № 149-ФЗ// «Российская газета» от 29.07.2006, № 165.
2. Распоряжение правительства России от 24 декабря 2013 года № 2506-р о концепции развития математического образования в Российской Федерации. //»Собрание законодательства РФ, 13.01.2014, № 2 (часть I) ст. 148.
3. Об образовании в Российской Федерации: Федеральный закон от 29.12.2012 №273-ФЗ (с последующими изменениями и дополнениями).
4. Федеральный государственный образовательный стандарт 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата), утвержден приказом Министерством образования и науки России от 12 ноября 2015 г. № 1327 (зарегистрировано в Минюсте России 30 ноября 2015г., регистрационный номер 39906).
5. Образовательный стандарт Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (утв. приказом ректора Академии от 18 августа 2016 г. № 01-4567).

6.5. Интернет-ресурсы

1. <http://www.i-exam.ru/> Единый портал интернет-тестирования в сфере образования
2. <http://www.nsu.ru/mmfvims/chernova/tv/lec>
3. http://www.nsu.ru/mmfvims/chernova/tv/tv_nsu07.pdf
4. Энциклопедия экономиста <http://www.grandars.ru/>
5. Банк задач <http://bankzadach.ru/>
6. Математика. Интерактивный обучающий курс - <http://math.immf.ru/>
7. Google Directory – Math (directory.google.com/Top/Science/Math). Каталог математических ресурсов, упорядоченных по типу и тематике. Содержит ссылки на более чем 12000 веб-сайтов.
8. <http://ecsocman.hse.ru/net/16000049/> – Федеральный образовательный портал ЭСМ (экономика, социология, менеджмент).
9. <http://www.nlr.ru/> – Российская национальная библиотека
10. <https://нэб.пф/> – Национальная электронная библиотека
11. <http://www.rsl.ru/> – Российская государственная библиотека
12. <http://econom.nsc.ru/jep/> Виртуальная экономическая библиотека
13. <http://www.searchengines.ru/> – Библиотека поисковых систем

6.6. Иные источники

1. Основные понятия теории вероятностей. А.Н. Колмогоров. – М., 1998.
2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 176 с.

7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

Для проведения занятий по дисциплине необходимо следующее материально-техническое обеспечение: учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, для самостоятельной работы: читальные залы библиотеки.

Программное обеспечение: MS Office Professional Plus 2016.

Информационные справочные системы: Научная библиотека РАНХиГС. URL: <http://lib.ranepa.ru/>; Научная электронная библиотека eLibrary.ru. URL: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>; Национальная электронная библиотека. URL: www.nns.ru; Российская государственная библиотека. URL: www.rsl.ru; Российская национальная библиотека. URL: www.nnir.ru; Электронная библиотека Grebennikon. URL: <http://grebennikon.ru/>; Электронно-библиотечная система Издательства «Лань». URL: <http://e.lanbook.com>; Электронно-библиотечная система ЮПАЙТ. URL: <http://www.biblio-online.ru/>; Электронно-библиотечная система ЭБС IPRBOOKS: <http://iprbookshop.ru/>.

Базы данных:

Bloomberg: <http://www.bloomberg.com/>

Компания "Emerging Markets Information Service" EMIS: <http://www.securities.com>

Информационный ресурс по мировой экономике компании International Monetary Fund (IMF) / Международного Валютного Фонда: <http://www.elibrary.imf.org>

Электронный ресурс Cbonds.ru: <http://cbonds.ru/>