Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015
Математика 10 – 11 класс
Очный этап
1 вариант

1. Вычислить **(максимум 10 баллов)**:

$$\sin^{8}\left(\frac{\pi}{16}\right)+\cos^{8}\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

Решение:

$\sin^{8}\left(\frac{\pi}{16}\right)+\cos^{8}\left(\frac{\pi}{16}\right)=\left(\sin^{2}\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^{4}+\left(\cos^{2}\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^{4}=\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^{4}=$
$=\frac{1}{16}\left[1-4\cos\frac{\pi}{8}+6\cos^{2}\left(\frac{\pi}{8}\right)-4\cos^{3}\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)+1+4\cos\frac{\pi}{8}+6\cos^{2}\left(\frac{\pi}{8}\right)+\right.$
$\left.+4\cos^{3}\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{1}{8}\left(1+6\cos^{2}\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(1+3\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+\right.$
$\left.+\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^{2}\right)=\frac{1}{8}\left(1+3+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\left(1+2\cos\frac{\pi}{4}+\cos^{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)=\frac{1}{8}\left(4+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\right.$
$\left.+\frac{1}{4}*\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(4+\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{64}\left(32+12\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+1\right)=\frac{1}{64}(35+$
$+14\sqrt{2})=\frac{35}{64}+\frac{7\sqrt{2}}{32}$

Ответ: $\frac{35}{64}+\frac{7\sqrt{2}}{32}$

2. Вычислить **(максимум 5 баллов)**
Найти функцию g(x), если для любого действительного числа x

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 4 \\ f(1 - 2g(x)) = 25 - 12x \end{cases}$$

Решение:

$f\left(1 - 2g(x)\right) = 3\left(1 - 2g(x)\right) + 4$ =>

$3\left(1 - 2g(x)\right) + 4 = 25 - 12x$

$3 - 6\,g(x) + 4 = 25 - 12x$

$6\,g(x) = 7 - 25 + 12x$

$6\,g(x) = 12x - 18$

$g(x) = 2x - 3$

Ответ: $g(x) = 2x - 3$

3. Решить неравенство **(максимум 10 баллов)**

$$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}\leq 1$$

Решение:

$\sqrt{(x+2)-4\sqrt{x+2}+\ 4}+\sqrt{(x+2)-6\sqrt{x+2}+\ 9}\leq 1$

$\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}\leq 1$

$|\sqrt{x+2}-\ 2|+|\sqrt{x+2}-\ 3|\leq 1$

ОДЗ: $x + 2 \geq 0$

$x \geq - 2$

$t = \sqrt{x+2}$; $t \geq 0$

$| t - 2| + | t - 3| \leq 1$

I. $t < 2$

$2 - t + 3 - t \leq 1$

$2t \geq 4$

$t \geq 2$

$\emptyset$ пустое множество

II. $2 \leq t < 3$

$t - 2 + 3 - t \leq 1$

$1 \leq 1$

$t \in R$

$2 \leq t < 3$ – решение данного пункта

III. $t \geq 3$

$t - 2 + t - 3 \leq 1$

$2t \leq 6$

$t \leq 3$

$t = 3$ – решение данного пункта

Объединяя решения пунктов, получаем

$2 \leq t \leq 3$

$2 \leq \sqrt{x+2} \leq 3$

$4 \leq x+2 \leq 9$

$2 \leq x \leq 7$ – решение неравенства

Ответ: [2; 7]

4. Решить задачу **(максимум 15 баллов)**

Курс рубля по отношению к доллару (количество долларов за один рубль) падает на **9,7%** в год. У клиента банка есть два варианта помещения денег. По первому варианту он может положить деньги на рублёвый счет с начислением **14%** в конце года. По второму варианту он может обменять рубли на доллары и положить деньги на валютный счёт с начислением **5%** в конце года. На сколько процентов больше или меньше окажется рублёвый счёт по отношению к валютному через год? Результат округлить до целых процентов.

(Считать одинаковым единовременный курс покупки и продажи доллара).

$$\frac{1{,}14 \cdot 0{,}903}{1{,}05} = 0{,}9804 \approx 0{,}98$$

Ответ: меньше на **2%**.

5. Решить **(максимум 15 баллов)**

На отрезке AC выбрана произвольно точка B и на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены окружности O_1, O_2 и O. Через точку B проведена произвольная прямая, пересекающая окружность O в точках P и Q, а окружности O_1 и O_2 – в точках R и S, соответственно. Докажите, что $PR = QS$.

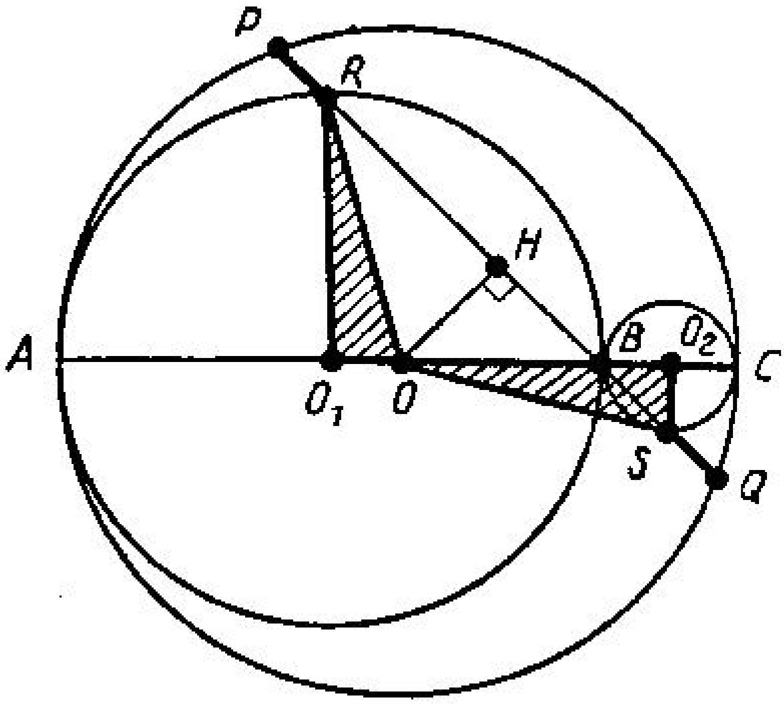


Рис. 1.

Решение: Обозначим радиусы проведённых окружностей через r_1, r_2, r. Рассмотрим треугольники O_1RO и O_2SO (см. рис.). У них $O_1R = OO_2 = r_1$, $O_1O = O_2S = r_2$ и $\angle OO_1R = \angle OO_2S$ (поскольку O_1R параллельно O_2S). Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $OR = OS$. Опуская перпендикуляр OH на хорду PQ, получаем $RH = SH$ и $PH = QH$; значит, $PR = PH - RH = QH - SH = QS$.

6. Вычислить **(максимум 15 баллов)**
Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-|x|}{x} \\ (x+2)^2 + y = a \end{cases}$$

имеет два различных решения.

$$a \in (2;\ 4] \cup [6;\ +\infty)$$

1) $a \in (2;\ 4],\ \ y_{1,2} = 2,\ \ x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{a-2}$

2) $a \in [6;\ +\infty),\ \ y_3 = 2,\ \ x_3 = -2 - \sqrt{a-2};$
$\quad y_4 = 0,\ \ x_4 = -2 + \sqrt{a}.$

7. Найдите решение уравнения: **(максимум 5 баллов)**

$$(a + 36)^7 = 194754273881$$

где а — простое число. Ответ нужно обосновать.

Решение: По количеству цифр в числе легко проверить, что$k^7 = (a + 36)^7 < 100^7$,а значит k<100. Проверив на периодичность степень чисел от 1 до 9, можно заметить, что последние цифры полученных чисел чередуются. И только 1 дает в 7 степени последнюю цифру 1. А значит вторая цифра числа k это 1. Далее, т. к. a – простое число и вторая цифра числа k-36это 5, то не трудно догадаться, что a = 5 (потому что нет других простых чисел с последней цифрой равной «5» кроме 5). Проверить себя можно разделив начальное число на 36+5 = 41.

Ответ: 5

8. Решить задачу **(максимум 20 баллов)**

В сферу радиуса $\boldsymbol{R}$ вписана правильная треугольная призма, в которой перпендикуляр, опущенный из вершины одного основания на сторону другого основания, на **25%** больше высоты призмы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ боковой грани?

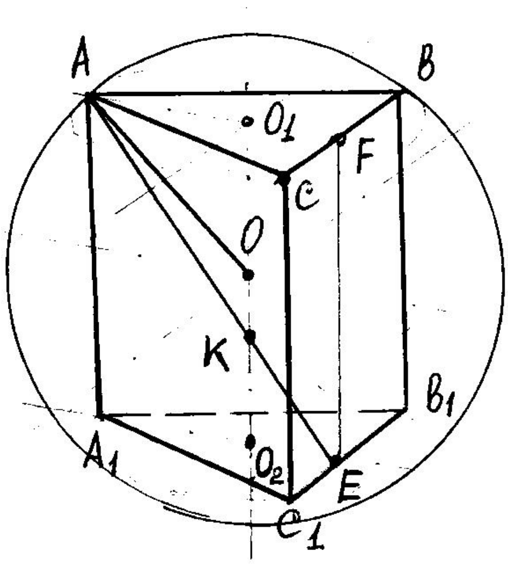


Рис. 1.

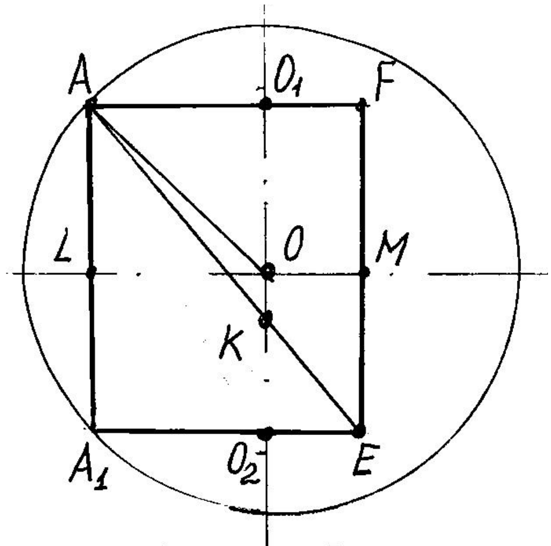


Рис. 2

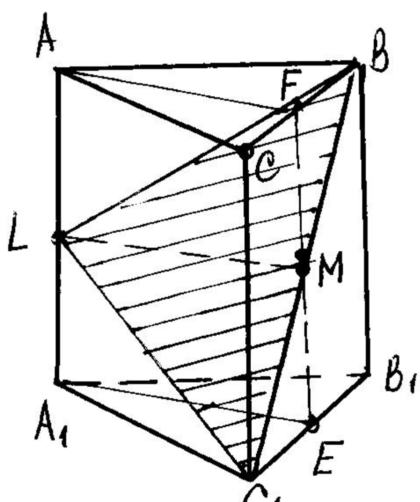


Рис. 3.

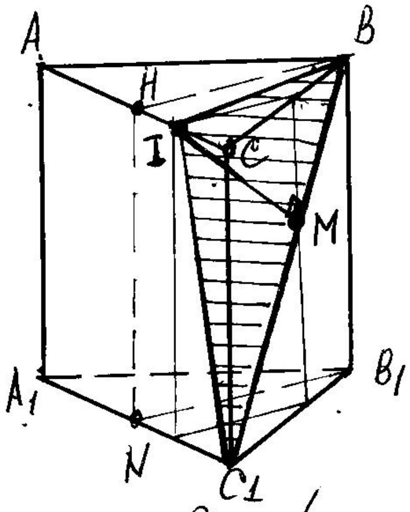


Рис. 4.

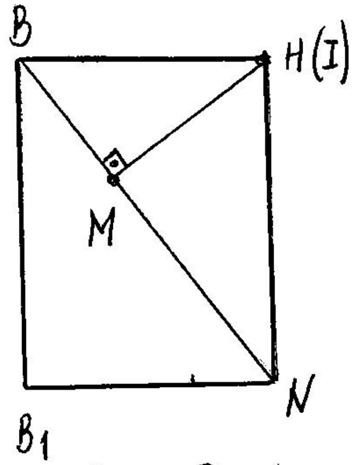


Рис. 5

Дано: $AE = 1{,}25 \cdot AA_1$, $AO = R.$

<u>Решение:</u> $AA_1^2 = AE^2 - A_1E^2$

$$A_1E^2 = (1{,}25)^2 AA_1^2 - AA_1^2 = \left(1{,}25^2 - 1\right)\cdot AA_1^2 \Rightarrow A_1E = \frac{3}{4}AA_1$$

$$A_1O_2 = \frac{2}{3}A_1E = \frac{1}{2}AA_1$$

$$\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2 + \left(A_1O_2\right)^2 = AO^2 \Rightarrow \frac{AA_1^2}{4} + \frac{AA_1^2}{4} = R^2 \Rightarrow AA_1 = \sqrt{2}R$$

$$A_1E = \frac{3}{4}AA_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}R, \qquad A_1C_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \frac{A_1E}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R$$

$LM = A_1E$ – наименьшая высота сечения BLC.

$$S_{\Delta BLC_1} = \frac{1}{2}C_1B \cdot LM = \frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2 + AA_1^2}\cdot LM = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}R^2 + 2R^2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}R = \frac{3\sqrt{7}}{8}R^2$$

Эта площадь больше площади половины боковой грани:

$$S_{\Delta BCC_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}R\cdot\sqrt{2}R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

Найдём кратчайшее расстояние между диагональю BC_1 и ребром AC (см. рис. 4).

$$B_1N = A_1E = \frac{3}{2\sqrt{2}}R \Rightarrow BN = \sqrt{B_1N^2 + AA_1^2} = \sqrt{\frac{9}{8}R^2 + 2R^2} = \frac{5}{2\sqrt{2}}R$$

$$HM = AA_1 \cdot \frac{B_1N}{BN} = \sqrt{2}R\,\frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}R}{\frac{5}{2\sqrt{2}}R} = \frac{3\sqrt{2}}{5}R$$

$$S_{\Delta BC_1H} = \frac{1}{2}C_1B\cdot HM = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}R\cdot\frac{3\sqrt{2}}{5}R = \frac{3\sqrt{7}}{10}R^2 < \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

Ответ: Наименьшая площадь сечения призмы – $S_{\Delta BC_1H} = \dfrac{3\sqrt{7}}{10}R^2$

9. Решить задачу **(максимум 5 баллов)**

В прямоугольнике ABCD дана вершина A (5; 2); уравнение стороны 2x-y+6=0 и диагонали x+3y=11. Написать уравнение второй диагонали.

Решение:

Т.к. координаты точки A не удовлетворяют уравнению 2x-y+6=0, то дано уравнение стороны BC или CD. Пусть это уравнение BC.

Итак, BC: 2x-y+6=0 => y = 2x + 6 => k_{BC} = 2 (угловой коэффициент).

AD || BC => k_{AD} = k_{BC} = 2 (условие параллельности прямых).

Найдем уравнение AD: y = 2x + b; подставляя сюда координаты точки A, получим: 2 = 10 + b => b = -8.

Итак, AD: y = 2x + 8.

Данная диагональ x + 3y = 11 проходит через т.A (5;2), т.к. 5 + 3*2 = 11.
Следовательно, это уравнение диагонали AC.

Найдем координаты точки C как пересечение стороны BC и диагонали AC:

C: $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ => $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ x + 3(2x + 6) = 11 \end{cases}$ => $\begin{cases} x + 6x + 18 = 11 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

Итак, C (-1; 4)

AB ⊥ BC => k_{AB}* k_{BC} = -1 (условие перпендикулярности прямых).
Отсюда k_{AB} = $-\frac{1}{K_{BC}} = -\frac{1}{2}$.

Найдем уравнение AB: $y = -\frac{1}{2}x + b$;
подставляя сюда координаты точки A, получим $2 = -\frac{1}{2} * 5 + b$ => $b = \frac{9}{2}$.
Итак, AB: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Теперь найдем координаты точки B как пересечение сторон AB и BC:

B: $\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}$ => $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ 2x + 6 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \end{cases}$ => $\begin{cases} 4x + 12 = -x + 9 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}$

Итак, B $\left(-\frac{3}{5}; \frac{24}{5}\right)$.

Найдем уравнение стороны CD. Т.к. CD || AB, то $k_{CD} = k_{AB} = -\frac{1}{2}$.
CD: $y = -\frac{1}{2}x + b$; подставляя сюда координаты точки C,
получим: $4 = -\frac{1}{2} * (-1) + b$ => $b = \frac{7}{2}$.

Итак, CD: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Найдем координаты точки D как пересечение сторон AD и CD:

D: $\begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 8 \\ 2x - 8 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 16 + = -x + 7 \\ y = 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = \frac{23}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$

Итак, D $\left(\frac{23}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Наконец, найдем уравнение второй диагонали BD: $y = kx + b$. Подставляя координаты точек B $\left(-\frac{3}{5}; \frac{24}{5}\right)$ и D $\left(\frac{23}{5}; \frac{6}{5}\right)$, получим систему уравнений:

$\begin{cases} \frac{24}{5} = -\frac{3}{5}k + b \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{5} + \frac{3}{5}k = \frac{6}{5} - \frac{23}{5}k \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24 + 3k = 6 - 23k \\ \frac{6}{5} = \frac{23}{5}k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{9}{13} \\ b = \frac{57}{13} \end{cases}$.

Итак, $y = -\frac{9}{13}x + \frac{57}{13}$ - уравнение второй диагонали.

Ответ: $y = -\frac{9}{13}x + \frac{57}{13}$

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015
Математика 10 – 11 класс
Очный этап
2 вариант

1. Вычислить **(максимум 10 баллов)**:

$$\sin^8\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

Решение:

$\sin^8\left(\frac{\pi}{24}\right) + \cos^8\left(\frac{\pi}{24}\right) = \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{24}\right)\right)^4 + \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)\right)^4 = \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}\right)^4 =$
$= \frac{1}{16}\left[1 - 4\cos\frac{\pi}{12} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1 + 4\cos\frac{\pi}{12} + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) +\right.$
$\left.+ 4\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(1 + 6\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{8}\left(1 + 3\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right) +\right.$
$\left.+ \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2\right) = \frac{1}{8}\left(1 + 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}\left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(2\cos\frac{\pi}{6} + +\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$
$\frac{1}{8}\left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} * \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{16}\right) = \frac{1}{8*16}(64 +$
$+ 24\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{3} + 3) = \frac{1}{8*16}(71 + 28\sqrt{3}) = \frac{71}{8*16} + \frac{28\sqrt{3}}{8*16} = \frac{71}{128} + \frac{7\sqrt{3}}{32}$.

Ответ: $\frac{71}{128} + \frac{7\sqrt{3}}{32}$

2. Вычислить **(максимум 5 баллов)**

Найти функцию g(x), если для любого действительного числа x

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 5 \\ f(1 - 3g(x)) = 21 - 6x \end{cases}$$

Решение:

$f\left(1 - 3g(x)\right) = 2\left(1 - 3g(x)\right) - 5$ =>

$2\left(1 - 3g(x)\right) - 5 = 21 - 6x$

$2 - 6\,g(x) - 5 = 21 - 6x$

$6\,g(x) = 2 - 5 - 21 + 6x$

$6\,g(x) = 6x - 24$

$g(x) = x - 4$

Ответ: $g(x) = x - 4$

3. Решить неравенство **(максимум 10 баллов)**

$$\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}+\sqrt{6+x-6\sqrt{x-3}}\leq 1$$

Решение:

$\sqrt{(x-3)-4\sqrt{x-3}+\ 4}+\sqrt{(x-3)-6\sqrt{x-3}+\ 9}\leq 1$

$\sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-3}-3)^2}\leq 1$

$|\sqrt{x-3}-\ 2|+|\sqrt{x-3}-\ 3|\leq 1$

ОДЗ: $x-3\geq 0$

$x\geq 3$

$t=\sqrt{x-3}$; $t\geq 0$

$|t-2|+|t-3|\leq 1$

I. $t<2$

$2-t+3-t\leq 1$

$2t\geq 4$

$t\geq 2$

$\emptyset$ пустое множество

II. $2\leq t<3$

$t-2+t-3\leq 1$

$1\leq 1$

$t\in R$

$2\leq t<3$ – решение данного пункта

III. $t\geq 3$

$t-2+t-3\leq 1$

$2t\leq 6$

$t\leq 3$

$t=3$ – решение данного пункта

Объединяя решения пунктов, получаем

$2\leq t\leq 3$

$2\leq\sqrt{x-3}\leq 3$

$4\leq x-3\leq 9$

$7\leq x\leq 12$ – решение неравенства

Ответ: [7; 12]

4. Решить задачу **(максимум 15 баллов)**

Торгово-промышленная биржа уплатила производителю за товар некоторую сумму. Посреднические услуги биржи выразились в увеличении цены товара на определённый процент. После чего, пятая часть товара была отправлена в качестве гуманитарной помощи пострадавшим от землетрясения, остальное поступило на торговое предприятие. Торговая наценка предприятия на **30%** выше, чем наценка биржи. Потребитель заплатил за товар сумму, превышающую на **44%** сумму, полученную производителем. Сколько процентов берёт биржа за свои посреднические услуги?

$$\frac{4}{5}\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{i+30}{100}\right)=1{,}44 \quad\Rightarrow\quad i^2+230i-5000=0 \quad\Rightarrow\quad i=20\%$$

5. Решить задачу **(максимум 15 баллов)**

Две окружности O и O_1 касаются внутренним образом. Третья окружность O_2 касается первых двух и линии их центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности (O_2), если известно, что радиусы окружностей O и O_1 равны **6** и **2**, соответственно.

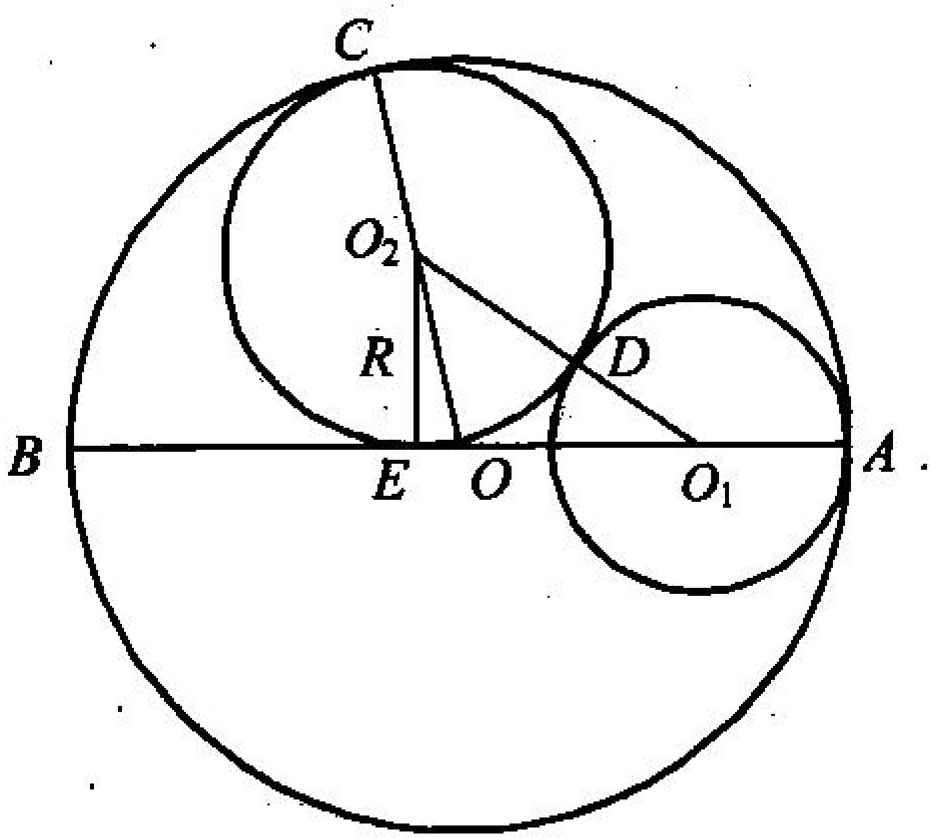


Рис. 1.

Решение:

а) Пусть AB диаметр большей из окружностей, O – её центр, O_1– центр окружности радиуса r_1, касающейся окружности с диаметром AB в точке A.

$$O_1A = r_1\ ,\ \ O_2C = r_2 \quad \Rightarrow \quad OO_2 = OC - r_2\ ,\ \ OO_1 = OA - r_1\ ,\ \ O_1O_2 = r_1 + r_2\ ,$$

тогда, периметр треугольника равен:

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r_1 + OC - r_2 + r_1 + r_2 = 2OA = AB$$

б) $OA = 6$, $r_1 = 2$

$$O_2E = r_2\ ,\ \ O_1O_2 = 2 + r_2\ ,\ \ OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4\ ,\ \ OO_2 = OC - O_2C = 6 - r_2$$

Из прямоугольных треугольников: O_1O_2E и OO_2E :

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{4 + 4r_2}$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - r_2)^2 - r_2^2} = \sqrt{36 - 12r_2}$$, так как $O_1E = OO_1 + OE$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4 + 4r_2} = 6 - 2 + \sqrt{36 - 12r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 3$$, точка E совпадает с O.

6. Вычислить **(максимум 15 баллов)**
Найдите все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{x + |x|}{x} \\ (x-2)^2 + a = y \end{cases}$$

Имеет единственное решение. Укажите это решение при каждом $\boldsymbol{a}$.

$$a \in [-4;-2] \cup \{2\}$$

1) $a = 2, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = 2$
2) $a \in [-4;-2], \quad y_2 = 2, \quad x_2 = \sqrt{2-a} + 2$

7. Найдите решение уравнения **(максимум 5 баллов)**:

$$(a + 56)^7 = 3142742836021$$

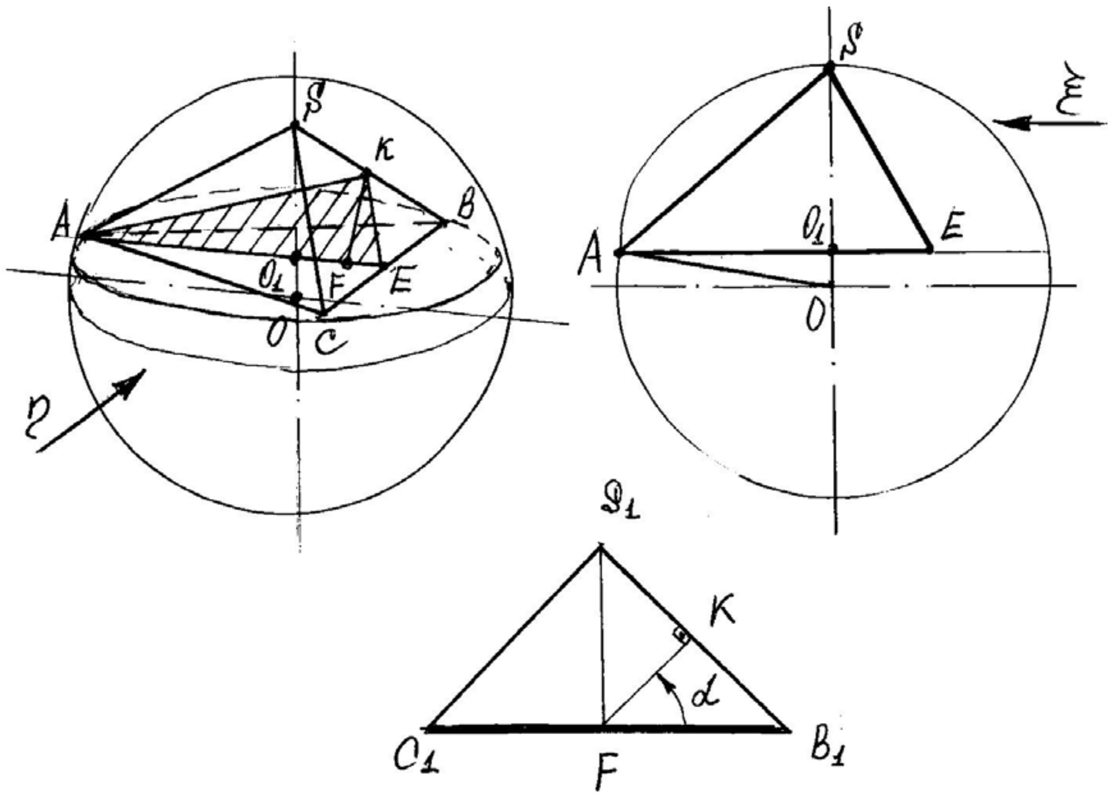
где а — простое число. Ответ нужно обосновать.

Решение: По количеству цифр в числе легко проверить, что $k^7 = (a + 56)^7 < 100^7$, а значит k<100. Проверив на периодичность степень чисел от 1 до 9, можно заметить, что последние цифры полученных чисел чередуются. И только 1 дает в 7 степени последнюю цифру 1. А значит вторая цифра числа k это 1. Далее, т. к. a – простое число и вторая цифра числа k-56 это 5, то не трудно догадаться, что а = 5 (потому что нет других простых чисел с последней цифрой равной «5» кроме 5). Проверить себя можно разделив заданное число на 56+5 = 61.

Ответ: 5

8. Решить задачу **(максимум 20 баллов)**

Какую наименьшую площадь может иметь сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через медиану основания, если высота пирамиды $\boldsymbol{H}$ составляет $6/7$ радиуса описанной сферы? Найдите угол между секущей плоскостью и основанием пирамиды в этом случае.



Дано: $\boldsymbol{OA = R,\ O_1S = H = \frac{6}{7}R.}$

Решение: $\boldsymbol{R = \frac{7}{6}H}$, $\boldsymbol{OO_1 = \frac{1}{6}H.}$ $\boldsymbol{O_1A = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{49}{36}H^2 - \frac{1}{36}H^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}H}$

$\boldsymbol{AE = \frac{3}{2}O_1A = \sqrt{3}H}$, $\boldsymbol{AC = BC = \frac{AE}{\sqrt{3}/2} = 2H}$

$\boldsymbol{S_1B_1}$ лежит в плоскости параллельной $\boldsymbol{AE}$ и содержащей $\boldsymbol{SB}$.

$\boldsymbol{FK = \frac{\sqrt{2}}{2}H}$ (т.к. $\boldsymbol{\Delta S_1FB_1}$ – прямоугольный, равнобедренный).

$\boldsymbol{FK}$ – расстояние (наименьшее) между скрещивающимися прямыми.

$\boldsymbol{S_{\min} = S_{\Delta AEK} = \frac{1}{2}AE \cdot FK = \frac{1}{2}\sqrt{3}H \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}H = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}H^2.}$

Ответ: Наименьшая площадь сечения пирамиды – $\boldsymbol{S_{\Delta AEK} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}H^2}$, $\boldsymbol{\alpha = 45^{\circ}.}$

9. Решить задачу **(максимум 5 баллов)**

В прямоугольнике ABCD дана вершина A (-1;3); уравнение стороны x-y=0 и диагонали 2y – x = 1. Написать уравнение второй диагонали.

Решение:

Т.к. координаты точки A не удовлетворяют уравнению x – y = 0, то дано уравнение стороны BC или CD. Пусть это уравнение BC.

Итак, BC: x – y = 0 => y = x => k_{BC} = 1 (угловой коэффициент).

AD || BC => k_{AD} = k_{BC} = 1 (условие параллельности прямых).

Найдем уравнение AD: y = x + b; подставляя сюда координаты точки A, получим: 3 = -1 + b => b = 4.

Итак, AD: y = x + 4.

Данная диагональ 2y - x = 1 не проходит через т. A (-1;3), т.к. 2*6 – (-1) ≠ 1.

Следовательно, дано уравнение диагонали BD.

Найдем координаты точки D как пересечение стороны AD и диагонали BD:

D: $\begin{cases} y = x + 4 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} y = x + 4 \\ 2(x + 4) - x = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} 2x + 8 - x = 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$

Итак, D (-7; -3)

Найдем уравнение стороны CD.

CD ⊥ BC => k_{CD} * k_{BC} = -1 (условие перпендикулярности прямых).

Отсюда $k_{CD} = -\frac{1}{K_{BC}} = -1$.

CD : y = - x + b. Подставляя сюда координаты точки D (-7; -3), получим: -3 = 7 + b => b = -10.

Итак, CD : y = - x - 10

Теперь найдем координаты точки C как пересечение сторон CD и BC:

C: $\begin{cases} y = -x - 10 \\ y = x \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -x - 10 \\ y = x \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \end{cases}$

Итак, C $(-5\,; -5\,)$.

Теперь найдем уравнение второй диагонали AC : y = kx + b. Подставляя координаты точек A (-1;3) и C $(-5\,; -5\,)$ получим систему уравнений:

$\begin{cases} 3 = -k + b \\ -5 = -5k + b \end{cases}$ => $\begin{cases} 3 + k = -5 + 5k \\ 3 = -k + b \end{cases}$ => $\begin{cases} 4k = 8 \\ b = k + 3 \end{cases}$ => $\begin{cases} k = 2 \\ b = 5 \end{cases}$.

Итак, y = 2x + 5- уравнение второй диагонали.

Ответ: y = 2x + 5