Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015
Математика 8 – 9 класс
Очный этап
1 вариант

1. Решить неравенство **(максимум 10 баллов)**

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)<3$$

Решение:
$[(x+1)(x+4)]*[(x+2)(x+3)]<3$
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)<3$
$t=x^2+5x+5$
$(t-1)(t+1)<3$
$t^2-1<3$
$t^2-4<0$
$(t-2)(t+2)<0$
$-2<t<2$
$-2<x^2+5x+5<2 \leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+5>-2 \ (1) \\ x^2+5x+5<2 \ (2) \end{cases}$
$(1): x^2+5x+5>-2$
$x^2+5x+7>0$
$D<0$
$x \in R$
$(2): x^2+5x+5<2$
$x^2+5x+3<0$
$D=25-4*3=13$
$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$
$(x-x_1)(x-x_2)<0$
$\frac{-5-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$
Решение системы: $x \in (\frac{-5-\sqrt{13}}{2};\frac{-5+\sqrt{13}}{2})$
Ответ: $(\frac{-5-\sqrt{13}}{2};\frac{-5+\sqrt{13}}{2})$

2. Найти остаток от деления многочлена **(максимум 10 баллов)**

x^{24} - 8 x^{15} + 1   на $x^2 - 1$

Решение:

Обозначим P(x) = x^{24} - 8 x^{15} + 1.

P(x) = (x^2 – 1)*Q(x) + R(x), где Q(x) – частное, R(x) – остаток.

Max степень остатка R(x) на 1 меньше степени делителя x^2 – 1 =>

R(x) = ax + b. Найдем a и b.

x^{24} - 8 x^{15} + 1 = (x^2 – 1)*Q(x) + ax + b.

При x = 1 имеем 1 – 8 + 1 = 0*Q(x) + a + b.

- 6 = a + b

При x = -1 имеем 1 + 8 + 1 = 0*Q(x) - a + b.

10 = - a + b

Решаем систему $\begin{cases} a + b = -6 \\ -a + b = 10 \end{cases}$ => $2b = 4$; b = 2

a + 2 = -6 => a = - 8

Итак, R(x) = -8x + 2

Ответ: -8x + 2

3. Найти действительные числа m и n так, чтобы функция f (x) была бы четной **(максимум 15 баллов)**

$$f(x) = (mx^2 - 2x + 3)(x^2 + nx - 2)$$

Решение:

f (x) – чётная, если для любого действительного x из ОДЗ f (-x) = f (x);

ОДЗ $x \in R$.

$f(-x) = (mx^2 + 2x + 3)(x^2 - nx - 2)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$

$(mx^2 + 2x + 3)(x^2 - nx - 2) = (mx^2 - 2x + 3)(x^2 + nx - 2)$ – тождество

$mx^4 - mnx^3 - 2mx^2 + 2x^3 - 2nx^2 - 4x + 3x^2 - 3nx - 6 =$

$= mx^4 + mnx^3 - 2mx^2 - 2x^3 - 2nx^2 + 4x + 3x^2 + 3nx - 6$

$2mnx^3 - 4x^3 + 8x + 6nx = 0$

$mnx^3 - 2x^3 + 4x + 3nx = 0$ – тождество

$x^3(mn - 2) + x(4 + 3n) = 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} mn - 2 = 0 \\ 4 + 3n = 0 \end{cases} \Rightarrow n = -\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3}m - 2 = 0$

$4m = -6$

$m = -\frac{3}{2}$

Ответ: $m = -\frac{3}{2}$; $n = -\frac{4}{3}$

4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств не имеет решений. **(максимум 10 баллов)**

$$\begin{cases} a^2 - x^2 > 0 \\ x^2 - 6|x| + 8 \le 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} a^2 - x^2 > 0 \\ x^2 - 6|x| + 8 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-a)\cdot(x+a) < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 6x + 8 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 6x + 8 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a \in (-2;\ 2)$$

---

5. Решить задачу **(максимум 15 баллов)**

В треугольнике ***ABC*** угол при вершине ***B*** в два раза больше угла при вершине ***A***. Биссектриса угла при вершине ***A*** и биссектриса внешнего угла при вершине ***C*** пересекаются в точке ***K***, $\angle AKC = 40^\circ$. Найдите углы треугольника (в градусах).

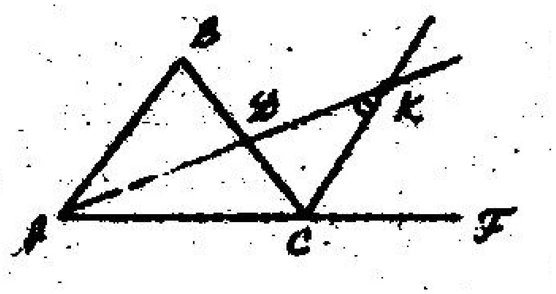

Рис. 1.

Решение: Обозначим угол при вершине ***A*** через α, по условию угол при вершине ***B*** равен 2α, тогда угол при вершине С равен $180^\circ - 3\alpha$. Рассмотрим треугольник ***AKC***: $\angle KAC = \dfrac{\alpha}{2}$, угол ***BCF*** – внешний угол треугольника ***ABC***, он равен сумме внутренних с ним несмежных, значит $\angle BCF = 3\alpha$; ***CK*** – биссектриса угла ***BCF***, поэтому $\angle KCF = \dfrac{3}{2}\alpha$ и $\angle ACK = 180^\circ - \dfrac{3}{2}\alpha$. По теореме о сумме углов треугольника имеем: $\dfrac{\alpha}{2} + \left(180^\circ - \dfrac{3}{2}\alpha\right) + 40^\circ = 180^\circ$, откуда $\alpha = 40^\circ$. Таким образом $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

6. Вычислить **(максимум 10 баллов)**

Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна **75**, сумма последних шести её членов равна **417**, а сумма всех членов прогрессии равна **1025**. Найти число членов прогрессии.

$$\frac{75+417}{12}\cdot n = 1025 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1025\cdot 12}{75+417} = 25$$

7. Сколько разных бус можно сделать из 1 белой, 3 красных и 2 синих бусин? Все бусы одного размера. **(максимум 10 баллов)**

Решение: Всего у нас 6 бусин, значит всего мы можем собрать 6*5*4*3*2*1 = 720 бус. Но нужно учитывать количество бусин одного цвета, поэтому это число нужно разделить на количество бус, которые можно было бы собрать из бусин одного цвета, потому что иначе мы будем получать одинаковые бусы, т. е. 720 разделить на 2 и на 3*2=6 соответственно. Также важно, что бусы должны получиться разные, а значит, будут бусы, совпадающие при повороте. Поэтому нужно разделить полученное число также на общее количество бусин в бусах, т. е. на 6. И точно также нужно учитывать и то, что бусы можно перевернуть, поэтому нужно полученное число еще разделить на 2. Тогда получится (6*5*4*3*2)/(6*2*3*2*2) = 5.

Ответ: 5

8. Решить задачу **(максимум 10 баллов)**

Ромб задан вершинами (0, 1), (0, -1), (2, 0) и (-2,0). Но оси координат Ох и Оу повернули относительно начала координат так, что угол между ними стал равен 30° (смежный угол равен 150° соответственно). Найдите площадь полученной фигуры.

Решение: Фактически, задача сводится к нахождению суммы площадей 4-х треугольников. Углы нам известны и прилегающие к ним стороны тоже (они равны 1 и 2 соответственно заданным координатам). Тогда очень удобно найти площадь каждого треугольника по формуле:

$\frac{1}{2} \times sin(30^o) \times 2 \times 1 = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \times sin(150^o) \times 2 \times 1 = \frac{1}{2}$,

Тогда ответ будет равен 2(1/2)+2(1/2)=2

Ответ: 2

9. Вычислить **(максимум 10 баллов)**

Большой Декарт.

Большой Декарт умеет перемещаться только в 4-х направлениях: шаг вверх, шаг вниз, шаг влево и шаг вправо (рис. 1). В итоге, множество всех возможных точек, в которые может перейти Декарт, образуют бесконечную сетку. Докажите, что для того, чтобы попасть в любую точку данной сетки, достаточно перемещаться только по 3-м направлениям (так, как это изображено на рис. 2). Шагать можно только по направлению, указанному стрелками.

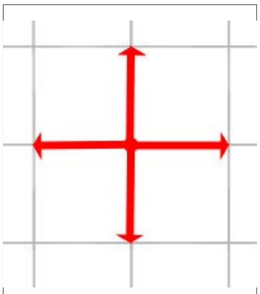

Рис. 1

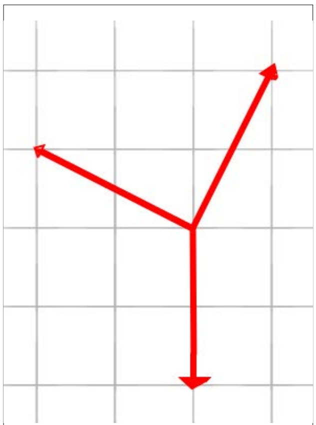

Рис. 2

Решение: Достаточно доказать, что шагая только в 3-х направлениях так, как это изображено на рисунке 2, можно получить шаг вверх, шаг вниз, шаг влево и шаг вправо. Обозначим шаг вверх и вправо на рисунке 2 за a, шаг вверх и влево за b, а шаг вниз за c. Также примем «+» за обозначение перехода к следующему шагу, так, к примеру, $a + b$ будет означать первый шаг a, а затем второй шаг b соответственно. Тогда решение будет следующим: шаг вверх равен $2a+b+2c$, шаг вниз $2a+b+3c$, шаг влево $a+c$, шаг вправо $3a+2b+4c$.

Олимпиада школьников РАНХиГС 2014-2015
Математика 8 – 9 класс
Очный этап
2 вариант

1. Решить неравенство **(максимум 10 баллов)**

$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)<8$$

Решение:

$[(x-4)(x-7)]*[(x-5)(x-6)]<8$

$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)<8$

$t=x^2-11x+29$

$(t-1)(t+1)<8$

$t^2-1<8$

$t^2-9<0$

$(t-3)(t+3)<0$

$-3<t<3$

$-3<x^2-11x+29<3 \leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+29>-3 \quad (1) \\ x^2-11x+29<3 \quad (2) \end{cases}$

$(1): x^2-11x+29>-3$

$x^2-11x+32>0$

$D=121-4*32=-7<0$

$x \in R$

$(2): x^2-11x+29<3$

$x^2-11x+26<0$

$D=121-4*26=121-104=17$

$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{17}}{2}$

$(x-x_1)(x-x_2)<0$

$\frac{11-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{11+\sqrt{17}}{2}$

Решение системы: $x \in (\frac{11-\sqrt{17}}{2};\frac{11+\sqrt{17}}{2})$

Ответ: $(\frac{11-\sqrt{17}}{2};\frac{11+\sqrt{17}}{2})$

2. Найти остаток от деления многочлена **(максимум 10 баллов)**

x^{36} - 2 x^{25} + 1 на x^2 - 1

Решение:

Обозначим P(x) = x^{36} - 2 x^{25} + 1.

P(x) = (x^2 – 1)*Q(x) + R(x), где Q(x) – частное, R(x) – остаток.

Max степень остатка R(x) на 1 меньше степени делителя x^2 – 1 =>

R(x) = ax + b. Найдем a и b.

x^{36} - 2 x^{25} + 1 = (x^2 – 1)*Q(x) + ax + b.

При x = 1 имеем 1 – 2 + 1 = 0*Q(x) + a + b.

0 = a + b

При x = -1 имеем 1 + 2 + 1 = 0*Q(x) - a + b.

4 = - a + b

Решаем систему $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases}$ => $2b = 4$; b = 2

a + 2 = 0 => a = - 2

Итак, R(x) = -2x + 2

Ответ: -2x + 2

3. Найти действительные числа m и n так, чтобы функция f (x) была бы четной **(максимум 10 баллов)**

$$f(x) = (x^2 - 3mx + 4)(nx^3 - x^2 + x)$$

Решение:

f (x) – чётная, если для любого действительного x из ОДЗ f (–x) = f (x);

ОДЗ $x \in R$.

$$f(-x) = (x^2 + 3mx + 4)(-nx^3 - x^2 - x)$$

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow$$

$$(x^2 + 3mx + 4)(-nx^3 - x^2 - x) = (x^2 - 3mx + 4)(nx^3 - x^2 + x)$$

$$-nx^5 - x^4 - x^3 - 3mnx^4 - 3mx^3 - 3mx^2 - 4nx^3 - 4x^2 - 4x =$$

$$= nx^5 - x^4 + x^3 - 3mnx^4 + 3mx^3 - 3mx^2 + 4nx^3 - 4x^2 + 4x$$

$nx^5 + x^3 + 3mx^3 + 4nx^3 + 4x = 0$ – должно быть тожество

$$\begin{cases} n = 0 \\ 1 + 3m + 3n = 0 \\ 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

4. Найти все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2 - 49 \le 0 \\ |11 - x| \le a. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе указать сумму целых значений параметра a или само значение параметра a, если оно единственное.

<u>Решение:</u>

$$a \ge 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |x-a| \le 7 \\ |11-x| \le a \end{cases} \Rightarrow\; \begin{cases} x \in [\,a-7;\; a+7\,] \\ x \in [\,11-a;\; 11+a\,] \end{cases} \Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a-7 = 11+a \\ a+7 = 11-a \end{array}\right. \Rightarrow\; a = 2$$

Решить задачу **(максимум 15 баллов)**

5. На гипотенузе $\boldsymbol{AB}$ прямоугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ построен квадрат. Точка пересечения диагоналей квадрата $\boldsymbol{O}$. Докажите, что прямая $\boldsymbol{OC}$ является биссектрисой прямого угла $\boldsymbol{ACB}$.

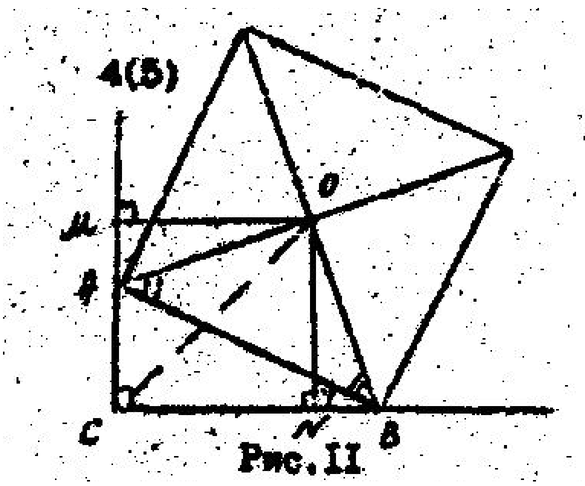

Рис. II

Решение: Пусть $OM \perp AC$ и $ON \perp BC$ (см. рис.). Рассмотрим прямоугольные треугольники $\boldsymbol{AMO}$ и $\boldsymbol{BNO}$. Они имеют равные гипотенузы $\boldsymbol{AO}$ и $\boldsymbol{BO}$. Если $\angle ABC = \varphi$, то $\angle CAB = 90^{\circ} - \varphi$. Заметим, что $\angle OAB = \angle OBA = 45^{\circ}$, поэтому $\angle MAO = 180^{\circ} - 45^{\circ} - (90^{\circ} - \varphi) - 45^{\circ} + \varphi$ и $\angle NBO = \varphi + 45^{\circ}$. Таким образом, прямоугольные треугольники $\boldsymbol{AMO}$ и $\boldsymbol{BNO}$ имеют также по равному острому углу. Следовательно, $\Delta AMO = \Delta BNO$ и $OM = ON$.

В прямоугольнике $\boldsymbol{CMON}$ смежные стороны $\boldsymbol{OM}$ и $\boldsymbol{ON}$ равны $\Rightarrow$ $\boldsymbol{CMON}$ – квадрат. Диагональ $\boldsymbol{OC}$ квадрата $\boldsymbol{CMON}$ делит его угол $\boldsymbol{MCN}$ пополам, значит $\boldsymbol{OC}$ – биссектриса угла $\boldsymbol{ACB}$.

Вычислить **(максимум 10 баллов)**

6. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна **35**, сумма последних пяти её членов равна **100**, а сумма всех членов прогрессии равна **202,5**. Найти число членов прогрессии.

$$\frac{35+100}{10}\cdot n = 202{,}5 \quad \Rightarrow \quad n=\frac{202{,}5\cdot 10}{35+100}=15$$

7. Вычислить **(максимум 10 баллов)**

Кай собирает из льдинок слово «вечность». Так уж получилось, что у него есть только: 3 буквы «О» разного цвета; по одной букве «Е», «Ч» и «Н»; 2 буквы «С» и 4 палочки «I» тоже разных цветов. Но Кай знает, что из двух букв «О» и одной палочки «I» можно собрать букву «В», из палочки «I» и буквы «С» можно собрать букву «Ь», а из двух палочек «I» можно собрать букву «Т». Сколько разных слов «вечность» можно собрать из этого набора?

Решение: Т.к. «Е», «Ч» и «Н» по одной букве, то их можно не учитывать. Остаются буквы «В», «О», «С», «Т» и «Ь». Так как порядок букв задан, а при сборке слова «вечность» используются все льдинки, то фактически, задача сводится к тому, сколькими способами можно разложить по порядку буквы «О», «С» и палочки «I». К примеру, первая буква «О» отвечает за верхнюю часть буквы «В», вторая буква «О» за нижнюю, а третья буква «О» отвечает за саму букву «О», тогда количество способов разложить разноцветные буквы «О» по порядку 1, 2, 3 будет равно 3*2*1. Аналогично для буквы «С» будет равно 2, и для палочек «I» будет равно 4*3*2*1. Тогда общее количество разных слов, которые можно собрать из этого набора будет 3*2*1*2*4*3*2*1=6*2*24=12*24=288

Ответ: 288

8. Вычислить **(максимум 10 баллов)**

Вершины квадрата находятся в точках (1, 1), (1, - 1), (-1, 1) и (-1, - 1). Но оси координат Ох и Оу повернули относительно начала координат так, что угол между ними стал равен 30° (смежный угол равен 150° соответственно). Найдите площадь полученной фигуры.

Решение: Фактически, задача сводится к нахождению суммы площадей 4-х ромбов или 8-ми треугольников. Углы нам известны и прилегающие к ним стороны тоже (они равны 1 соответственно заданным координатам). Тогда очень удобно найти площадь каждого треугольника по формуле:

$\frac{1}{2} \times sin(30^o) * 1 * 1 = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2} * sin(150^o) * 1 * 1 = \frac{1}{4}$,

Тогда ответ будет равен 4(1/4)+4(1/4)=2

Ответ: 2

№9. Франкенштейн **(максимум 10 баллов)**

Доктор Франкенштейн собирает человекоподобного робота. На рисунке изображены детали: ноги, руки, тело и голова. Придумайте такое отображение:

$$(x, y) \to \left(f(x), f(y)\right)$$

чтобы совместить отдельные детали робота между собой и собрать его. (Подсказка: здесь отображением $(x, y) \to \left(f(x), f(y)\right)$называется такая функция *f*, которая переводит любую точку x в точку $f(x)$, и любую точку y в точку $f(y)$. К примеру, если $f(x) = x + 2$ и $f(y) = y + 2$, то тогда точка (2,3) отображается в точку (2+2,3+2) т.е. $(2,3) \to (4,5)$)

Решение: Здесь нужно догадаться через свойства функций, которые нам требуются. А именно, нам нужно, чтобы все отрицательные точки стали положительными. Т.е. подходят к примеру функции $|x|$ или $\boldsymbol{x^2}$.