

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2019-2020 учебный год

Задания для учеников 8 – 9 класса

Отборочный (заочный) этап

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит ознакомиться с инструкцией:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 по московскому времени 18 ноября 2019 года. Иного таймера нет.
2. Рекомендуем загрузить работу не менее чем за 1 час до окончания приема работ: в 00:00 по московскому времени 19 ноября 2019 года система блокирует прием работ автоматически.
3. Работа выполняется только самостоятельно. Коллективно выполненные работы будут аннулированы.
4. Порядок оформления работы:
 - 4.1. Создать новый файл в текстовом редакторе (например, MS Word).
 - 4.2. Настроить шрифт Times New Roman, Arial или другой общеупотребимый, кегль 12 либо 14, междустрочный интервал 1,15 либо 1,5, абзацный отступ 1,25.
 - 4.3. Внести ответы и решения, соблюдая порядок, указанный в заданиях
 - 4.4. Проверить соблюдение требований к объему, если они указаны в задании
 - 4.5. Выделить номера заданий полужирным шрифтом
5. Порядок сохранения работы:
 - 5.1. Проверить, что в файле с ответами и решениями все корректно
 - 5.2. Сохранить файл в формате PDF. Например, для MS WORD: Файл→Сохранить как...→Тип файла PDF (*.pdf)
 - 5.3. Открыть созданный файл в формате PDF. Проверить, что при сохранении не изменилось отображение элементов текста и графики (при наличии)
6. Порядок загрузки работы на сайт:
 - 6.1. Зайти в Личный кабинет: <https://olymp.ranepa.ru/shkolnik/olimpiada/lichnyj-kabinet> по своему логину и паролю
 - 6.2. Нажать кнопку «Загрузить ответы» в разделе профиля олимпиады
 - 6.3. Выбрать файл с ответами и решениями в формате PDF для загрузки
 - 6.4. Нажать CTRL+F5 для обновления страницы
 - 6.5. Открыть загруженный файл и проверить корректность его отображения
7. Замена файла при некорректной загрузке:

У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену.
8. Прием работ осуществляется только через Личный кабинет. Работы, направленные любым другим способом, в том числе по электронной почте, не оцениваются.
9. Обращаем ваше внимание, что файл простым изменением расширения на PDF системой не читается. За такую работу будет выставлена оценка 0 баллов.
10. Работа аннулируется за использование заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточники: научные работы, статьи, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными.
11. Работа с любыми указанными персональными данными участника, в том числе подписанная, будет аннулирована.

Задание 1.

Максимум 10 баллов

В Темном Подземелье, в плену у 100 орков находится 1000 добрых гномов. Главный орк придумал схему: оркам присваиваются номера от 00 до 99, а гномам – от 000 до 999. За гномом следят те орки, номер которых можно получить вычеркиванием из номера гнома одной цифры (например, за гномом под номером 146 следят орки 14, 16, 46).

Главный орк утверждает, что следить за гномами при такой схеме могут всего 50 орков. И все равно за каждым гномом будет следить хотя бы один орк. А остальных орков следует отправить завоевывать новые города.

а) Прав ли главный орк и хватит ли 50 орков, чтобы ни один гном не остался незамеченным при побеге? Обоснуйте свой ответ.

б) Если ответ на первый вопрос «Да», то возможно ли высвободить большее количество орков? Если ответ на первый вопрос «Нет», то возможно ли в принципе сократить количество орков, следящих за гномами? Обоснуйте свой ответ.

Решение:

а) **Ответ: Главный орк прав.** Действительно, математически задача сводится к вопросу сможем ли мы найти такие 50 двузначных чисел, из которых сможем добавлением одной цифры спереди, в середине или в конце получить всю 1000 трехзначных чисел. (Очевидно, что в рамках задачи двузначных чисел $10 \cdot 10$, а трехзначных $10 \cdot 10 \cdot 10$, т.к. на любом месте может быть любая из 10 цифр). Итак, разобьем все 100 чисел на числа, состоящие из цифр одной четности и разной четности. В каждой такой группе 50 чисел. (Легко показать, составив таблицу 10×10)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00		02		04		06		08	
1		11		13		15		17		19
2	20		22		24		26		28	
3		31		33		35		37		39
4	40		42		44		46		48	
5		51		53		55		57		59
6	60		62		64		66		68	
7		71		73		75		77		79
8	80		82		84		86		88	
9		91		93		95		97		99

Очевидно, что группа чисел с цифрами разной четности не сможет охватить всех, не будет покрытия чисел 000, 111 и т.д. А вот вторая группа даст все номера, т.к. в трехзначных числах всегда два числа одной четности. Ч.Т.Д.

б) Ответ: еще больше уменьшить количество орков нельзя.

Решение:

Пусть можно убрать больше орков, при условии, что они не дублируют друг друга (никакие два надзирателя не следят за одинаковым набором заключенных). Пусть в таблицу внесены какие-то 50 чисел, которые дают нам 1000 номеров. Обозначим количество пустых клеток в i -ой строке a_i , а количество клеток в j -ом столбце b_j .

$$\text{Тогда } 100 - \sum_{i=0}^9 a_i \leq 50, \text{ а } 100 - \sum_{j=0}^9 b_j \leq 50$$

Заметим, что когда двузначными числами «покрывается» вся тысяча, то, если клетка ij пустая и клетка kj пустая, клетка ik обязательно полная.

$$\text{Отсюда } 10 - a_i + 10 - b_j \geq 10$$

Но таких вариантов 10.

$$100 + 100 - \sum_{i=0}^9 (a_i + b_i) \leq 100 \text{ из первого утверждения}$$

$$200 - \sum_{i=0}^9 (a_i + b_i) \geq 100 \text{ из второго утверждения}$$

Одновременно эти неравенства могут удовлетворяться только при количестве пустых клеток 50.

Критерии:

- **10 баллов** - оба пункта объяснены, получен верный ответ.
- **8 баллов** - дано объяснение и получен верный ответ на пункт а).
- **5 баллов** - при решении пункта а) была применена верная логика, но решение не доведено до ответа.
- **2 балла** - нет решения к пункту а), но есть объяснение и дан правильный ответ на пункт б).
- **0 баллов** - в остальных случаях.

Задание 2.**Максимум 15 баллов**

Решите уравнение:

$$|3x + 3|^3 + |3x - 5|^3 = 131.$$

Решение:

Сделаем замену переменной:

$$t = \frac{3x + 3 + 3x - 5}{2} = 3x - 1.$$

Уравнение примет вид:

$$|t + 4|^3 + |t - 4|^3 = 131.$$

Нетрудно понять, что функция $f(t) = |t + 4|^3 + |t - 4|^3$ - четная, поэтому достаточно решить уравнение при $t \geq 0$. Рассмотрим случаи раскрытия модуля:а) При $0 \leq t \leq 4$, имеем

$$(t + 4)^3 - (t - 4)^3 = 131.$$

Отсюда находим $t = \frac{\sqrt{2}}{4}$.б) При $t > 4$, имеем

$$(t + 4)^3 + (t - 4)^3 = 131 \Leftrightarrow 2t^3 + 96t - 131 = 0.$$

Функция $g(t) = 2t^3 + 96t - 131$ монотонно возрастает, поэтому при $t > 4$ $f(t) > 381$, а значит, решений на данном промежутке нет.Имеем решения $t = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$. Откуда получим

$$x = \frac{t + 1}{3} = \frac{\pm \frac{\sqrt{2}}{4} + 1}{3} = \frac{\pm \sqrt{2} + 4}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pm \sqrt{2} + 4}{12}$.**Критерии оценивания:**

- **15 баллов** – обоснованно получен верный ответ.
- **10 баллов** – решение содержит верную последовательность шагов, приводящую к верному ответу, однако в ходе решения допущена одна арифметическая ошибка.
- **5 баллов** – решение содержит верные шаги, имеется хотя бы один обосновано полученный ответ, однако разобраны не все случаи.
- **0 баллов** – решение не соответствует ни одному из приведенных критериев.

Задание 3.

Максимум 10 баллов

В стране Чудес проводится предвыборная кампания на должность лучшего любителя чая, в которой участвуют Болванщик, Мартовский Заяц и Соня. По результатам опроса 20% жителей собираются проголосовать за Болванщика, 25% - за Зайца, 30% - за Соню. Остальные жители колеблются. Определите, какое наименьшее число процентов от числа колеблющихся должен привлечь Болванщик, чтобы гарантированно не проиграть Зайцу и Соне (при любом раскладе голосов), зная, что каждый из колеблющихся проголосует за одного из кандидатов. Победитель определяется простым большинством голосов. Ответ обосновать.

Решение:

Пусть в стране Чудес N жителей, тогда за Болванщика собираются проголосовать $0,2N$ жителей, за Зайца - $0,25N$ жителей, за Соню - $0,3N$ жителей. Колеблющихся $0,25N$ жителей. Пусть α – доля от числа колеблющихся, собирающихся проголосовать за Болванщика. Болванщик заведомо не проиграет на выборах, если количество проголосовавших за него будет не меньше, чем число голосов у его оппонентов. За него проголосует $0,2N + 0,25N\alpha$. В самом «худшем» случае оставшаяся доля $1 - \alpha$ голосов колеблющихся перейдет к Зайцу либо Соне. Поэтому для выполнения условия задачи нужно, чтобы

$$\begin{cases} 0,2N + 0,25N\alpha \geq 0,25N + 0,25N(1 - \alpha), \\ 0,2N + 0,25N\alpha \geq 0,3N + 0,25N(1 - \alpha). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 + 0,25\alpha \geq 0,25 + 0,25(1 - \alpha), \\ 0,2 + 0,25\alpha \geq 0,3 + 0,25(1 - \alpha). \end{cases}$$

Ясно, что достаточно решить второе неравенство системы:

$$0,2 + 0,25\alpha \geq 0,3 + 0,25 - 0,25\alpha \Leftrightarrow 0,5\alpha \geq 0,35 \Leftrightarrow \alpha \geq 0,7.$$

Наименьшее значение $\alpha = 0,7$, что соответствует 70% от числа колеблющихся.

Ответ: 70%.

Критерии оценивания:

- **10 баллов** – обоснованно получен верный ответ.
- **5 баллов** – имеется верная последовательность рассуждений, приводящая к правильному ответу, однако допущена арифметическая ошибка.
- **0 баллов** – решение не соответствует ни одному из приведенных критериев.

Задание 4.**Максимум 15 баллов**

Найти значение выражения при условии, что суммирование производится бесконечно

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$$

Решение:Обозначим $x = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$, $x > 0$.

Возведем обе части полученного равенства в квадрат. Получим:

$$x^2 = 20 + x;$$

$$x^2 - x - 20 = 0;$$

$$D = 1 + 80 = 81; \quad x_1 = \frac{1-9}{2} = -4 \text{ — не удовл. условию } x > 0;$$

$$x_1 = \frac{1+9}{2} = 5 \text{ — подходит.}$$

Ответ: 5.

Критерии**0 баллов** - Если вычислено приближенно, то 0%.**8 баллов** - Если в ответе оба корня уравнения: -4 и 5 , то 50%.**15 баллов** - Если ответ верный, приведено какое-либо верное и обоснованное решение без применения калькулятора, то 100%.

Задание 5.

Максимум 15 баллов

В небольшом государстве Коныр любимый всеми его жителями товар «равот» продается на рынке совершенной конкуренции. Министерство экономического развития этого государства проводит исследование состояния экономики и собирает данные по различным рынкам, в том числе и по рынку товара «равот». Аналитики министерства собрали следующую информацию о рынке «равота»:

- Спрос и предложение всегда представимы линейными функциями и изменяются только сезонно. Спрос разный в каждое время года, а предложение меняется только два раза в год. Весной и осенью предложение такое же, как и летом.
- При сокращении спроса на «равот» вдвое весной по сравнению со спросом летом, объем его продаж на рынке сокращается в полтора раза.
- Весной совокупная выручка производителей товара «равот» составляет 90 денежных единиц Коныра.
- Зимой, когда предложение сокращается вдвое относительно остальных сезонов, а спрос падает вдвое относительно весеннего спроса, количество проданного на рынке «равота» составляет всего 5 единиц этого товара.
- В любое время года производители «равота» согласились бы продавать его, только если его цена была бы больше 4 денежных единиц. При цене 4 или меньше производители не производят «равот».

Вам необходимо помочь Министерству экономического развития Коныра ответить на следующие вопросы его правительства:

- 1) Если «заморозить» цену «равота» на весь год на уровне зимней цены, то каков будет дефицит этого товара летом?
- 2) Если не вмешиваться в ценообразование на рынке «равота», то каковы будут совокупные расходы на покупку этого товара у жителей Коныра летом?
- 3) При какой минимальной цене «равота» жители Коныра откажутся от его покупки? Зависит ли эта цена от времени года?

Решение и критерии проверки:

Пусть функция спроса весной имеет вид: $Q_{\text{весна}}^D(p) = a - bp$, тогда функция спроса зимой и летом имеют, соответственно вид: $Q_{\text{зима}}^D(p) = (a - bp)/2$ и $Q_{\text{лето}}^D(p) = 2(a - bp)$.

Пусть функция предложения весной, летом и осенью имеет вид: $Q_{\text{в,л,о}}^S(p) = c + dp$, тогда функция предложения зимой имеет вид $Q_{\text{зима}}^S(p) = (c + dp)/2$

Обратим внимание, что весной и зимой равновесная цена товара была одинаковой, поскольку одна и та же значение переменной – цена является решением обоих уравнений:

$$Q_{\text{весна}}^D(p) = a - bp_{\text{весна}} = Q_{\text{в,л,о}}^S(p) = c + dp_{\text{весна}}$$

$$Q_{\text{зима}}^D(p) = \frac{a - bp_{\text{зима}}}{2} = Q_{\text{зима}}^S(p) = \frac{c + dp_{\text{зима}}}{2}$$

При этом, поскольку спрос и предложение весной были в два раза больше весной относительно зимы, то в равновесии весной было продано в два раза больше товара, чем зимой. По условию зимой было продано 5 единиц товара, тогда весной продали 10 единиц. Тогда объем продаж этого товара летом равен $1,5 \cdot 10 = 15$.

Известно, что весной совокупная выручка производителей составила 90 денежных единиц, значит цена товара весной была равна $90/10=9$ денежных единиц. Зимой, как уже получили выше цена товара также была равна 9.

Теперь по имеющимся данным о равновесиях зимой и весной найдем функции предложения в каждый период времени, учитывая, что при цене 4 и ниже производители не станут продавать товар:

$$Q_{в,л,о}^s(9) = c + 9d = 10,$$

$$Q_{в,л,о}^s(4) = c + 4d = 0.$$

Откуда находим: $c = -8, d = 2$ и $Q_{в,л,о}^s(p) = 2p - 8, \quad Q_{зима}^s(p) = p - 4$

Учитывая, что летом будет продано 15 единиц товара, из функции предложения найдем равновесную летнюю цену:

$$Q_{в,л,о}^s(p) = 2p_{лето} - 8 = 15 \text{ и } p_{лето} = 11,5$$

Теперь найдем функции спроса, учитывая известные равновесные объемы и цены весной и летом:

$$Q_{весна}^D(9) = a - 9b = 10,$$

$$Q_{лето}^D(11,5) = 2(a - 11,5b) = 15.$$

Откуда находим, что $a = 19, b = 1$. Тогда $Q_{весна}^D(p) = 19 - p$ и $Q_{лето}^D(p) = 2(19 - p)$.

Теперь можно ответить на вопросы задания:

- 1) Если цена товара будет «заморожена» на уровне зимней цены, то величина спроса на него летом составит $2(19-9)=20$ единиц. А предложение (как ранее уже находили) только 10 единиц. Тогда дефицит товара составит $20-10=10$ единиц. (**максимум 2 балла**)
- 2) Чтобы определить расходы жителей на покупку товара летом, необходимо умножить цену купленного товара на его количество. Летом было продано 15 единиц товара по цене 11,5. Тогда расходы на покупку товара летом составили $11,5*15=172,5$ денежных единиц. (**максимум 2 балла**)
- 3) Жители откажутся от покупки товара, как видно из найденных функций спроса если цена товара составит 19 денежных единиц и более. Тогда искомая величина цены равна 19. Причем эта цена не зависит от времени года. (**максимум 2 балла**)

За логически обоснованное решение и верное нахождение функций предложения - максимум 5 баллов

За логически обоснованное решение и верное нахождение функций спроса - максимум 4 балла.

Каждая арифметическая ошибка в решении штрафуетя снижением оценки на 1 балл.

Задание 6.

Максимум 10 баллов

В апреле этого года Российская газета в рубрике Экономика опубликовала статью «Сами с полисами» (<https://rg.ru/2019/04/24/strahovat-zhivotnyh-stali-chashche.html>). Опираясь только на информацию, предоставленную авторами статьи, и приводя экономические обоснования, ответьте на следующие вопросы:

- 1) Почему в России и Германии при страховании гражданской ответственности владельцев домашних животных столь велика разница в отношении суммы страхового покрытия к стоимости страхового взноса?
- 2) Как в ближайшие годы может измениться стоимость полиса при страховании домашних животных?

Пояснение: При аргументации ответов на поставленные вопросы обязательно цитируйте те части статьи, которые позволяют Вам дать обоснование. Чем точнее и конкретнее при своих ответах Вы будете ссылаться на информацию, тем качественнее будут Ваши ответы и тем более высокую оценку Вы получите за это задание.

Решение и критерии проверки:

Представим возможные аргументы при ответе на вопросы задания, ссылаясь на представленный текст публикации. **За аргументированный ответ на каждый пункт задания ставится максимум 5 баллов.**

- 1) Согласно статье, отношение суммы страхового покрытия к стоимости страхового взноса в России может составлять $100000/2000=50$ или $1500000/23000\approx 65$, а в Германии может достигать $3000000/80\approx 37500$. Такую разницу можно объяснить тем, что «Для международной практики страхование гражданской ответственности владельцев домашних животных является обычным делом, в России же такой вид страхования только начинает появляться на рынке». Кроме того, в Германии, как и во многих европейских странах «...страхование домашних животных является лицензированным видом страхования по аналогии с ДМС, а в некоторых странах обязательно страхование гражданской ответственности владельцев животных. Например, в Германии под обязательное страхование гражданской ответственности попадают владельцы опасных пород собак.» То есть если совокупный объем страховых сделок, как, например, в России, мал, владельцам животных придется больше заплатить за страховку своего домашнего животного, чтобы покрыть расходы страховых компаний на выплату страхового покрытия. Страховые компании могут резонно предполагать, что в России покупать страховой полис, скорее, будут те владельцы животных, риск возникновения страхового случая для которых выше, чем у тех, кто не покупает полис. Тогда как в Германии вероятность выплат при возникновении страховых случаев может быть значительно меньше, поскольку покупка страховки является обязательной для владельцев домашних животных. Поэтому и разница в отношении суммы страхового покрытия к стоимости страхового взноса в Германии значительно больше.
- 2) Согласно статье, «По данным Аналитического центра НАФИ, домашних питомцев держат больше половины россиян. С каждым годом семей с питомцами становится все больше, а расходы на их содержание растут», кроме того «... растет и число людей, желающих застраховать жизнь и здоровье своих любимцев». Таким образом, спрос на страховые продукты, связанные со страховкой домашних животных в России, постепенно растет. Но «Новые страховые продукты всегда возникают как ответ на запрос потребителя», поэтому и предложение таких страховых продуктов со стороны страховых компаний может возрасти. Таким образом, рост спроса и предложения, согласно классическому представлению равновесия на рынке, может привести как к росту цены этих продуктов, так и к снижению их цены. Поэтому предсказать однозначно направление изменения цены, основываясь на данных публикации, пока невозможно.

Задание 7.

Максимум 10 баллов

В современном мире каждому потребителю часто приходится принимать решения о замене старой техники на более энергоэффективную. Рассмотрим жителя мегаполиса, который использует лампу накаливания мощностью 60 Вт ежемесячно в объеме 100 часов. Тариф на использование электроэнергии составляет 5 руб./кВт*ч.

Горожанин может купить более энергоэффективную лампу мощностью 12 Вт, которая стоит 120 руб. и дает такой же световой поток, как и указанная выше лампа накаливания. Либо он может обратиться к инвестору (энергосервисную компанию), которая сама установит такую энергосберегающую лампу, но взамен по договору горожанин должен будет на протяжении 10 месяцев платить компании 75% от возникшей экономии стоимости электроэнергии (плата по тарифу вносится независимо от способа установки лампы).

(а) Если горожанин осуществляет планирование своих расходов только на 10 месяцев вперед, то будет ли он устанавливать энергосберегающую лампу сам или обратится к компании-инвестору?

(б) Если горожанин планирует свои расходы на весь срок службы типовой энергосберегающей лампы, то какое решение он примет?

Решение и схема оценивания:

а) Расходы за 10 месяцев при самостоятельно установке энергосберегающей лампы:

$$120 \text{ руб.} + 12 \text{ (Вт)} * 100 \text{ (часов)} / 1000 * 5 \text{ (руб./кВт*час)} * 10 \text{ (мес.)} = 180 \text{ руб.}$$

Расходы за 10 месяцев при обращении к энергосервисной компании:

$$(12 + (60 - 12) * 0,75) \text{ (Вт)} * 100 \text{ (часов)} / 1000 * 5 \text{ (руб./кВт*час)} * 10 \text{ (мес.)} = 240 \text{ руб.}$$

Таким образом, самый выгодный из рассматриваемых альтернативных вариантов – установка энергосберегающей лампы самому.

Полное верное решение – 6 баллов. Верно рассчитан только один вариант – 3 балла.

б) Ожидаемый срок службы типовой лампы более 10 месяцев. Поскольку после 10 месяцев нужно платить только за потребление электроэнергии, то, как в п. а) выгоднее будет самостоятельная установка.

Обоснование (в том числе с расчетами) 4 балла

Задание 8.

Максимум 15 баллов

Если Вы легально хотите приобрести право на просмотр фильма, как правило у вас есть два варианта: взять фильм напрокат (посмотреть его вы сможете в течение очень короткого времени) или купить его «навсегда». Объясните, почему для компаний может быть невыгодна продажа фильма «навсегда» и почему это, наоборот, может быть выгодно. Напишите только экономические аргументы.

Решение и критерии оценивания:

Схема оценивания: по 4 балла за разные аргументы за и против относительно каждой формы продажи, максимум 15 баллов всего.

Пример аргументов относительно продажи навсегда:

За: возможность продать дороже сейчас, т.к. продается сразу несколько просмотров;

Против: возможность передачи права на просмотр сейчас/в будущем другим лицам, вследствие чего потеря выручки от других потребителей; потеря будущей выручки из-за невозможности продажи просмотра тому же пользователю в будущем (продали товар длительного пользования).

Пример аргументов относительно проката:

За: возможность продать просмотр большему числу потребителей, которые ценят его меньше и готовы платить меньше;

Против: возможность передачи права на просмотр сейчас другим лицам, вследствие чего потеря выручки от других потребителей; большие издержки на администрирование продаж, т.к. каждый покупатель может покупать просмотры неоднократно.